A folheação de Jouanolou em característica p

Wodson Mendson

Universidade Federal Fluminense - UFF
V CBJME

12 de Setembro, 2024

Estrutura

- Parte I: Introdução
- Parte II: Folheações em característica p
- Parte III: A folheação de Jouanolou em característica p

Parte I: Introdução

Folheações

Hoje: folheações = folheações em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$

Folheações

Hoje: folheações = folheações em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$

Seja $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

Uma **folheação**, $\mathcal{F}$, de grau d no plano projetivo $\mathbb{P}^2_K$ é dada, módulo K^*, por elemento não-nulo $\omega \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_K, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_K}(d+2))$ com conjunto singular finito.

Folheações

Hoje: folheações = folheações em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$

Seja $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

Uma **folheação**, $\mathcal{F}$, de grau d no plano projetivo $\mathbb{P}^2_K$ é dada, módulo K^*, por elemento não-nulo $\omega \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_K, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_K}(d+2))$ com conjunto singular finito.

Explicitamente:

- Pela sequencia exata de Euler, podemos ver ω como uma 1-forma projetiva:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

em $\mathbb{A}^3_K$ tais que $A, B, C \in K[x, y, z]$ são homogêneos de grau $d+1$ e $Ax + By + Cz = 0$ com

$$\mathrm{sing}(\omega) = \mathcal{Z}(A, B, C) = \{p \in \mathbb{P}^2_K \mid A(p) = B(p) = C(p) = 0\}$$

finito.

Folheações via campos

Suponha que a característica de K não divide $d + 2$.

Folheações via campos

Suponha que a característica de K não divide $d + 2$.

- Uma folheação de grau d em $\mathbb{P}^2_K$ é determinada, modulo K^*, por um campo homogêneo em $\mathbb{A}^3_K$:

$$v = A_0\partial_x + A_1\partial_y + A_2\partial_z \in \mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^3_K)$$

onde $A_0, A_1, A_2 \in K[x, y, z]$ são homogêneos de grau d com

$$\mathbf{div}(v) = \partial_x A_0 + \partial_y A_1 + \partial_z A_2 = 0$$

Folheações via campos

Suponha que a característica de K não divide $d+2$.

- Uma folheação de grau d em $\mathbb{P}^2_K$ é determinada, modulo K^*, por um campo homogêneo em $\mathbb{A}^3_K$:

$$v = A_0\partial_x + A_1\partial_y + A_2\partial_z \in \mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^3_K)$$

onde $A_0, A_1, A_2 \in K[x,y,z]$ são homogêneos de grau d com

$$\mathbf{div}(v) = \partial_x A_0 + \partial_y A_1 + \partial_z A_2 = 0$$

O seguinte resultado demonstra a equivalência:

Proposição

[a] *Existe uma bijeção entre o conjunto de 1-formas projetivas em $\mathbb{A}^3_K$ de grau $d+1$ e campos homogêneos de grau d com divergente nulo.*

[a] Jouanolou - **Equations de Pfaff algébriques**

Exemplo

Suponha que $\mathcal{F}$ seja dada pela 1-forma:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

Exemplo

Suponha que $\mathcal{F}$ seja dada pela 1-forma:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

O campo homogêneo de grau d com divergente zero associado é:

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

Exemplo

Suponha que $\mathcal{F}$ seja dada pela 1-forma:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

O campo homogêneo de grau d com divergente zero associado é:

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

Exemplo: Seja $\alpha \in K^*$ e considere:

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

Exemplo

Suponha que $\mathcal{F}$ seja dada pela 1-forma:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

O campo homogêneo de grau d com divergente zero associado é:

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

Exemplo: Seja $\alpha \in K^*$ e considere:

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

ω define uma folheação de grau um em $\mathbb{P}^2_K$ e o campo associado é dado por:

$$v = \left(\frac{2\alpha - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha}{3}\right) z\partial_z$$

Curvas invariantes

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada por uma 1-forma ω.

Curvas invariantes

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada por uma 1-forma ω.

Seja $C = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^2_K$ uma curva algébrica dada por um polinômio irredutível $F \in K[x, y, z]$.

Curvas invariantes

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada por uma 1-forma ω.

Seja $C = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^2_K$ uma curva algébrica dada por um polinômio irredutível $F \in K[x, y, z]$.

Definição

*A curva C é $\mathcal{F}$**-invariante** se existe uma 2-forma homogênea σ em $\mathbb{A}^3_K$ tal que*

$$dF \wedge \omega = F\sigma$$

Curvas invariantes

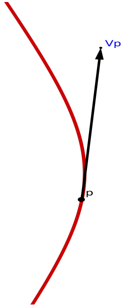
Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada por uma 1-forma ω.

Seja $C = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^2_K$ uma curva algébrica dada por um polinômio irredutível $F \in K[x, y, z]$.

Definição

*A curva C é **$\mathcal{F}$-invariante** se existe uma 2-forma homogênea σ em $\mathbb{A}^3_K$ tal que*

$$dF \wedge \omega = F\sigma$$



Exemplo: folheações com curvas algébricas invariantes

- a folheação dada por

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

possui $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ e $\{z = 0\}$ como curvas algébricas invariantes.

Exemplo: folheações com curvas algébricas invariantes

- a folheação dada por

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

possui $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ e $\{z = 0\}$ como curvas algébricas invariantes.

- **folheações logarítmicas**: sejam $d_1, d_2, \dots, d_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $F_1, \dots, F_r \in K[x, y, z]$ polinômios homogêneos com $d_i = \deg(F_i)$. Suponha que $F_1, \dots, F_r$ são irredutíveis e coprimos. Sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in K^*$ tais que $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i d_i = 0$ e considere a 1-forma

$$\Omega = F_1 F_2 \cdots F_{r-1} F_r \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \frac{dF_i}{F_i}.$$

A 1-forma Ω define, $\mathcal{F}_\Omega$, uma folheação de grau $d = \sum_i d_i - 2$ em $\mathbb{P}^2_K$. Dizemos que $\mathcal{F}_\Omega$ é uma **folheação logarítmica** de tipo $(d_1, \dots, d_r)$. As curvas $C_i = \{F_i = 0\}$ são $\mathcal{F}_\Omega$-invariantes.

Jouanolou: folheações sem curvas algébricas invariantes

Seja $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ e considere a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada pela 1-forma:

$$\mathcal{F}_d\colon \Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

$$v_d = z^d \partial_x + x^d \partial_y + y^d \partial_z$$

Jouanolou: folheações sem curvas algébricas invariantes

Seja $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ e considere a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada pela 1-forma:

$$\mathcal{F}_d \colon \Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

$$v_d = z^d \partial_x + x^d \partial_y + y^d \partial_z$$

Teorema (Jouanolou)

[a] *Se $K = \mathbb{C}$ a folheação $\mathcal{F}_d$ não tem curvas algébricas invariantes*

[a] Jouanolou - **Equations de Pfaff algébriques**

Jouanolou: folheações sem curvas algébricas invariantes

Seja $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ e considere a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada pela 1-forma:

$$\mathcal{F}_d \colon \Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

$$v_d = z^d \partial_x + x^d \partial_y + y^d \partial_z$$

Teorema (Jouanolou)

[a] *Se $K = \mathbb{C}$ a folheação $\mathcal{F}_d$ não tem curvas algébricas invariantes*

[a] Jouanolou - **Equations de Pfaff algébriques**

O resultado implica, em particular, que em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ **quase toda** folheação não tem curva algébrica invariante

Parte II: Folheações em característica $p > 0$

O p-divisor em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$ de característica $p > 0$.

O p-divisor em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$ de característica $p > 0$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ de grau d definida por

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e suponha que $p \nmid d + 2$.

O p-divisor em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$ de característica $p > 0$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ de grau d definida por

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e suponha que $p \nmid d + 2$. Escreva $d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy)$ e seja v_ω o campo de grau d associado a $\mathcal{F}$ dado por

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

O p-divisor em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$ de característica $p > 0$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ de grau d definida por

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e suponha que $p \nmid d + 2$. Escreva $d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy)$ e seja v_ω o campo de grau d associado a $\mathcal{F}$ dado por

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

O p-**divisor** é definido pondo

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{i_{v_\omega^p}\omega = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_K).$$

Note que $\Delta_{\mathcal{F}}$ possui grau $p(d-1) + d + 2$.

O p-divisor em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$ de característica $p > 0$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ de grau d definida por

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e suponha que $p \nmid d + 2$. Escreva $d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy)$ e seja v_ω o campo de grau d associado a $\mathcal{F}$ dado por

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

O p-**divisor** é definido pondo

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{i_{v_\omega^p}\omega = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_K).$$

Note que $\Delta_{\mathcal{F}}$ possui grau $p(d-1) + d + 2$.

Definição

*A folheação $\mathcal{F}$ é p-**fechada** se $\Delta_{\mathcal{F}} = 0$.*

Exemplo

Seja $\alpha \in K^*$ e considere

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

Exemplo

Seja $\alpha \in K^*$ e considere

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

ω define uma folheação de grau 1 em $\mathbb{P}^2_K$. O campo associado é:

$$v = \left(\frac{2\alpha - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha}{3}\right) z\partial_z$$

Exemplo

Seja $\alpha \in K^*$ e considere

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

ω define uma folheação de grau 1 em $\mathbb{P}^2_K$. O campo associado é:

$$v = \left(\frac{2\alpha - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha}{3}\right) z\partial_z$$

Por iteração, obtemos

$$v^p = \left(\frac{2\alpha^p - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha^p}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha^p}{3}\right) z\partial_z$$

Exemplo

Seja $\alpha \in K^*$ e considere

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

ω define uma folheação de grau 1 em $\mathbb{P}^2_K$. O campo associado é:

$$v = \left(\frac{2\alpha - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha}{3}\right) z\partial_z$$

Por iteração, obtemos

$$v^p = \left(\frac{2\alpha^p - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha^p}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha^p}{3}\right) z\partial_z$$

e o p-divisor é:

$$i_{v^p}\omega = yzv^p(x) - \alpha xzv^p(y) + (\alpha - 1)xyv^p(z) = (\alpha^p - \alpha)xyz$$

Exemplo

Seja $\alpha \in K^*$ e considere

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

ω define uma folheação de grau 1 em $\mathbb{P}^2_K$. O campo associado é:

$$v = \left(\frac{2\alpha - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2-\alpha}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1-\alpha}{3}\right) z\partial_z$$

Por iteração, obtemos

$$v^p = \left(\frac{2\alpha^p - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2-\alpha^p}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1-\alpha^p}{3}\right) z\partial_z$$

e o p-divisor é:

$$i_{v^p}\omega = yzv^p(x) - \alpha xzv^p(y) + (\alpha - 1)xyv^p(z) = (\alpha^p - \alpha)xyz$$

Se $\alpha \notin \mathbb{F}_p$:

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{x = 0\} + \{y = 0\} + \{z = 0\}.$$

O p-divisor

Principal propriedade:

O p-divisor

Principal propriedade:

Proposição

[a] *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação não p-fechada em $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ e $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ uma curva algébrica*

- *Se C é $\mathcal{F}$-invariante então* $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$*;*

O p-divisor

Principal propriedade:

Proposição

[a] *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação não p-fechada em $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ e $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ uma curva algébrica*

- *Se C é $\mathcal{F}$-invariante então $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$;*
- *Se $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \mod p$ então C é $\mathcal{F}$-invariante.*

[a] W.Mendson - **Foliations on smooth algebraic surface in positive characteristic**

O p-divisor

Principal propriedade:

Proposição

[a] *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação não p-fechada em $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ e $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ uma curva algébrica*

- *Se C é $\mathcal{F}$-invariante então $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$;*
- *Se $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \mod p$ então C é $\mathcal{F}$-invariante.*

[a] W.Mendson - **Foliations on smooth algebraic surface in positive characteristic**

Corolário

No plano projetivo sobre característica $p > 0$ qualquer folheação de grau d com $p \nmid d+2$ possui uma curva algébrica invariante.

O p-divisor

Principal propriedade:

Proposição

[a] *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação não p-fechada em $\mathbb{P}^2_k$ e $C \subset \mathbb{P}^2_k$ uma curva algébrica*

- *Se C é $\mathcal{F}$-invariante então $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$;*
- *Se $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \mod p$ então C é $\mathcal{F}$-invariante.*

[a] W.Mendson - **Foliations on smooth algebraic surface in positive characteristic**

Corolário

No plano projetivo sobre característica $p > 0$ qualquer folheação de grau d com $p \nmid d + 2$ possui uma curva algébrica invariante.

Proposição (J.V.Pereira)

[a] *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathbb{P}^2_K$ e suponha que $\deg(\mathcal{F}) < p - 1$. Então, $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica invariante.*

[a] J.V.Pereira - **Invariant Hypersurfaces for Positive Characteristic Vector Fields**

O p-divisor

Corolário

No plano projetivo sobre característica $p > 0$ qualquer folheação não p-fechada possui uma curva algébrica invariante de grau menor do que ou igual a $p(d-1)+d+2$.

O p-divisor

Corolário

No plano projetivo sobre característica $p > 0$ qualquer folheação não p-fechada possui uma curva algébrica invariante de grau menor do que ou igual a $p(d-1) + d + 2$.

Problema: Seja $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2_K$. Quantas soluções $\mathcal{F}$ tem?

O p-divisor

Corolário

No plano projetivo sobre característica $p > 0$ qualquer folheação não p-fechada possui uma curva algébrica invariante de grau menor do que ou igual a $p(d-1) + d + 2$.

Problema: Seja $\mathcal{F}$ em $\mathbb{P}^2_K$. Quantas soluções $\mathcal{F}$ tem?

Proposição

[a] *Uma folheação é p-fechada se e somente se ela possui uma infinidade de curvas algébricas invariantes.*

[a] Brunella, Nicolau - **Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff**

Exemplos curiosos

Exemplo

Suponha que K possui característica 3 e considere a folheação de Jouanolou de grau 2 sobre K. Etão o 3-divisor é irredutível com $\operatorname{sing}(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\subset \operatorname{sing}(\mathcal{F})$.

Exemplo (F.Touzet)

Considere a folheação 5-fechada:

$$\omega = 2z(x+y)dx + z(2z+x)dy + 4(2x^2 + 3xy + 2yz)dz$$

A curva $C = \{-x^4 + x^3y + x^2yz + y^2z^2\}$ *is* $\mathcal{F}$*-invariante com* $[0:0:1] \in \operatorname{sing}(C)$ *mas não em* $\operatorname{sing}(\mathcal{F})$.

Redução módulo p

Considere o caso onde $K = \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau d definida pela 1-forma projetiva:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \qquad A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d+1}$$

Redução módulo p

Considere o caso onde $K = \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau d definida pela 1-forma projetiva:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \qquad A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d+1}$$

e seja $\mathbb{Z}[\mathcal{F}]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito obtida por junção de todos os coeficientes, e seus inversos, que ocorrem A, B e C

Redução módulo p

Considere o caso onde $K = \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau d definida pela 1-forma projetiva:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \qquad A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d+1}$$

e seja $\mathbb{Z}[\mathcal{F}]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito obtida por junção de todos os coeficientes, e seus inversos, que ocorrem A, B e C

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ a folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dada pela 1-forma:

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

para algum $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$. Então, a álgebra associada é $\mathbb{Z}[\alpha, \alpha^{-1}]$

Redução módulo p

Considere o caso onde $K = \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau d definida pela 1-forma projetiva:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \qquad A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d+1}$$

e seja $\mathbb{Z}[\mathcal{F}]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito obtida por junção de todos os coeficientes, e seus inversos, que ocorrem A, B e C

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ a folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dada pela 1-forma:

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

para algum $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$. Então, a álgebra associada é $\mathbb{Z}[\alpha, \alpha^{-1}]$

Para a folheação de Jouanolou, $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ de modo que $\mathbb{Z}[\mathcal{F}_d] = \mathbb{Z}$.

Redução módulo p

Fato: Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$ o corpo residual $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}[\mathcal{F}]/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Redução módulo p

Fato: Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$ o corpo residual $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}[\mathcal{F}]/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Denote por $\omega_{\mathfrak{p}}$ a 1-forma sobre $\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}$ obtida via redução módulo $\mathfrak{p}$ dos coeficientes que aparecem em A, B e C. Assim, obtemos um elemento não nulo de $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}}(d+2))$ e $\omega_{\mathfrak{p}}$ determina uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}$:

$$\omega_{\mathfrak{p}} = Adx + Bdy + Cdz \mod \mathfrak{p}$$

Redução módulo p

Fato: Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$ o corpo residual $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}[\mathcal{F}]/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Denote por $\omega_{\mathfrak{p}}$ a 1-forma sobre $\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}$ obtida via redução módulo $\mathfrak{p}$ dos coeficientes que aparecem em A, B e C. Assim, obtemos um elemento não nulo de $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}}(d+2))$ e $\omega_{\mathfrak{p}}$ determina uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}$:

$$\omega_{\mathfrak{p}} = Adx + Bdy + Cdz \mod \mathfrak{p}$$

Definição

*A folheação determinada por $\omega_{\mathfrak{p}}$ é denotada por $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ e chamada de a **redução módulo p de $\mathcal{F}$.***

Redução módulo p

Questão natural:

Redução módulo p

Questão natural:

Problema

Suponha que uma propriedade abstrata $\boldsymbol{P}$ *vale para* $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ *para uma infinidade de primos (ou quase-todos primos)* $\mathfrak{p} \in \boldsymbol{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$. *O que podemos dizer sobre* $\mathcal{F}$*?*

Redução módulo p

Questão natural:

Problema

Suponha que uma propriedade abstrata $\boldsymbol{P}$ *vale para* $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ *para uma infinidade de primos (ou quase-todos primos)* $\mathfrak{p} \in \boldsymbol{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$*. O que podemos dizer sobre* $\mathcal{F}$*?*

- **infinidade de primos** = primos num subconjunto denso de $\mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$;
- **quase-todos primos** = primos num aberto não vazio de $\mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$.

Redução módulo p

Questão natural:

Problema

Suponha que uma propriedade abstrata $\boldsymbol{P}$ *vale para* $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ *para uma infinidade de primos (ou quase-todos primos)* $\mathfrak{p} \in \boldsymbol{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$. *O que podemos dizer sobre* $\mathcal{F}$*?*

- **infinidade de primos** = primos num subconjunto denso de $\mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$;
- **quase-todos primos** = primos num aberto não vazio de $\mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$.

Quando $\mathbb{Z}[\mathcal{F}] = \mathbb{Z}$ as noções: **infinidade de primos** e **quase-todos** são as noções usuais.

Redução módulo p

A propriedade **P** pode ser:

- a existência de curvas $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$-invariantes;

Redução módulo p

A propriedade **P** pode ser:

- a existência de curvas $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$-invariantes;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ é p-fechada;

Redução módulo p

A propriedade **P** pode ser:

- a existência de curvas $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$-invariantes;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ é p-fechada;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ possui p-divisor irredutível/reduzido;

Redução módulo p

A propriedade **P** pode ser:

- a existência de curvas $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$-invariantes;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ é p-fechada;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ possui p-divisor irredutível/reduzido;

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e suponha que $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ tem uma curva algébrica invariante de grau menor do que $\boldsymbol{d}$ para quase-todos primos $\mathfrak{p}$. Então, $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica invariante de grau menor do que $\boldsymbol{d}$.

Redução módulo p

A propriedade **P** pode ser:

- a existência de curvas $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$-invariantes;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ é p-fechada;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ possui p-divisor irredutível/reduzido;

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e suponha que $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ tem uma curva algébrica invariante de grau menor do que $\boldsymbol{d}$ para quase-todos primos $\mathfrak{p}$. Então, $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica invariante de grau menor do que $\boldsymbol{d}$.

Ideia: o conjunto $S(\mathcal{F}, K, d)$ de folheações em $\mathbb{P}^2_K$ que possuem curvas algébricas de grau $\leq d$ é uma variedade algébrica sobre K. Em particular, $S(\mathcal{F}, \mathbb{C}, d) \neq \varnothing$ se e somente se $S(\mathcal{F}, \overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}, d) \neq \varnothing$ para quase-todos primos $\mathfrak{p}$.

Soluções algébricas

Objetivo: usar redução módulo p para provar não-algebricidade de folheações holomorfas

[1] Carnicer - **The Poincare problem in the nondicritical case**

Soluções algébricas

Objetivo: usar redução módulo p para provar não-algebricidade de folheações holomorfas

Proposição

[a] *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida pela 1-forma $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ com $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]$. Seja p um primo tal que $p > d + 2$. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível então $\mathcal{F}$ não possui soluções algébricas.*

[a] W.Mendson - **Foliations on smooth algebraic surfaces in position characteristic**

[1] Carnicer - **The Poincare problem in the nondicritical case**

Soluções algébricas

Objetivo: usar redução módulo p para provar não-algebricidade de folheações holomorfas

Proposição

[a] *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida pela 1-forma $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ com $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]$. Seja p um primo tal que $p > d + 2$. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível então $\mathcal{F}$ não possui soluções algébricas.*

[a] W.Mendson - **Foliations on smooth algebraic surfaces in position characteristic**

Ideia: Suponha que existe uma curva invariante $C = \{F = 0\}$. Podemos assumir $F \in \mathbb{Z}[x, y, z]$. A cota de Carnicer [1] implica que $\deg(C) \leq d + 2$. Reduzindo módulo p e usando a irredutibilidade de $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ chegamos numa contradição.

[1] Carnicer - **The Poincare problem in the nondicritical case**

Aplicações

Corolário

A folheação de Jouanolou de grau 2 *ou* 3 *não possui soluções algébricas.*

Aplicações

Corolário

A folheação de Jouanolou de grau 2 ou 3 não possui soluções algébricas.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Proposição

Se o p-divisor $\Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}}$ é irredutível para quase todo primo $\mathfrak{p}$ então $\mathcal{F}$ não possui soluções algébricas.

Aplicações

Corolário

A folheação de Jouanolou de grau 2 ou 3 não possui soluções algébricas.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Proposição

Se o p-divisor $\Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}}$ é irredutível para quase todo primo $\mathfrak{p}$ então $\mathcal{F}$ não possui soluções algébricas.

Ideia: Suponha que exista uma curva algébrica invariante $C = \{F = 0\}$ de grau e. Para primos grandes p obtemos $C \mod p = \Delta_{\mathcal{F}_p}$, uma contradição visto que o grau do p-divisor depende de p.

De $\mathbb{F}_2$ para $\mathbb{C}$

Usando ideias parecidas podemos provar o seguinte resultado (Jouanolou)

Teorema

Uma folheação muito genérica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d > 1$ com $d \not\equiv 1 \mod 3$ não tem soluções algébricas

De $\mathbb{F}_2$ para $\mathbb{C}$

Usando ideias parecidas podemos provar o seguinte resultado (Jouanolou)

Teorema

Uma folheação muito genérica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d > 1$ com $d \not\equiv 1 \mod 3$ não tem soluções algébricas

Ideia: É suficiente mostrar que a folheação $\mathcal{F}_d$ dada pela 1-forma

$$\mathcal{F}_d \colon \Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

não tem soluções algébricas.

De $\mathbb{F}_2$ para $\mathbb{C}$

Usando ideias parecidas podemos provar o seguinte resultado (Jouanolou)

Teorema

Uma folheação muito genérica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d > 1$ com $d \not\equiv 1 \mod 3$ não tem soluções algébricas

Ideia: É suficiente mostrar que a folheação $\mathcal{F}_d$ dada pela 1-forma

$$\mathcal{F}_d \colon \Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

não tem soluções algébricas.

- Suponha que exista uma solução algébrica $C = \{F = 0\}$ dada por um irredutível $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$.

De $\mathbb{F}_2$ para $\mathbb{C}$

Usando ideias parecidas podemos provar o seguinte resultado (Jouanolou)

Teorema

Uma folheação muito genérica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d > 1$ com $d \not\equiv 1 \mod 3$ não tem soluções algébricas

Ideia: É suficiente mostrar que a folheação $\mathcal{F}_d$ dada pela 1-forma

$$\mathcal{F}_d \colon \Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

não tem soluções algébricas.

- Suponha que exista uma solução algébrica $C = \{F = 0\}$ dada por um irredutível $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$.
- Um lema técnico (via automorfismos de $\mathcal{F}_d$) garante que podemos construir uma curva irredutível $D = \{G = 0\}$ definida sobre $\mathcal{O}_L$ para algum corpo de número L com $\deg(D) = d + 2 \equiv 1 \mod 2$.

De $\mathbb{F}_2$ para $\mathbb{C}$

Usando ideias parecidas podemos provar o seguinte resultado (Jouanolou)

Teorema

Uma folheação muito genérica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d > 1$ com $d \not\equiv 1 \mod 3$ não tem soluções algébricas

Ideia: É suficiente mostrar que a folheação $\mathcal{F}_d$ dada pela 1-forma

$$\mathcal{F}_d \colon \Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

não tem soluções algébricas.

- Suponha que exista uma solução algébrica $C = \{F = 0\}$ dada por um irredutível $F \in \mathbb{C}[x, y, z]$.
- Um lema técnico (via automorfismos de $\mathcal{F}_d$) garante que podemos construir uma curva irredutível $D = \{G = 0\}$ definida sobre $\mathcal{O}_L$ para algum corpo de número L com $\deg(D) = d + 2 \equiv 1 \mod 2$.
- Redução módulo 2 e comparação de graus (o 2-divisor é irredutível!) implica numa contradição

Folheação de Jouanolou em característica p

Teorema

Seja $p > 2$ um número primo tal que $7 \nmid p + 4$ e tal que $p \not\equiv 1 \mod 3$. Então, a folheação de Jouanolou de grau dois $\mathcal{F}_2$ definida sobre um corpo de característica p possui p-divisor irredutível.

Folheação de Jouanolou em característica p

Teorema

Seja $p > 2$ um número primo tal que $7 \nmid p + 4$ e tal que $p \not\equiv 1 \mod 3$. Então, a folheação de Jouanolou de grau dois $\mathcal{F}_2$ definida sobre um corpo de característica p possui p-divisor irredutível.

Na prova, usamos um automorfismo particular de $\mathcal{F}_2$.

Automorfismos de folheações:

$\mathcal{F} = \langle \omega \rangle$

Folheação de Jouanolou em característica p

Teorema

Seja $p > 2$ um número primo tal que $7 \nmid p + 4$ e tal que $p \not\equiv 1 \mod 3$. Então, a folheação de Jouanolou de grau dois $\mathcal{F}_2$ definida sobre um corpo de característica p possui p-divisor irredutível.

Na prova, usamos um automorfismo particular de $\mathcal{F}_2$.

Automorfismos de folheações:

$\mathcal{F} = \langle \omega \rangle$

Um automorfismo de $\mathcal{F}$ é um automorfismo, Φ, de $\mathbb{P}^2_K$ que preserva $\mathcal{F}$ no seguinte sentido:

$$\Phi^* \omega = \sigma(\Phi) \omega$$

para algum $\sigma(\Phi) \in K^*$. O grupo de automorfismo de $\mathcal{F}$ é denotado por $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$.

Folheação de Jouanolou: exemplo

Seja $\mathcal{F}_d$ definida por

$$\Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz.$$

[2] aqui, assumimos que p não divide $d^2 + d + 1$

Folheação de Jouanolou: exemplo

Seja $\mathcal{F}_d$ definida por

$$\Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz.$$

Seja γ uma raiz primitiva $(d^2 + d + 1)$-ésima da unidade[2] da unidade e considere

$$\Phi \colon \mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K \qquad [x : y : z] \mapsto [\gamma^{d^2+1} x : \gamma y : z]$$

[2] aqui, assumimos que p não divide $d^2 + d + 1$

Folheação de Jouanolou: exemplo

Seja $\mathcal{F}_d$ definida por

$$\Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz.$$

Seja γ uma raiz primitiva $(d^2 + d + 1)$-ésima da unidade[2] da unidade e considere

$$\Phi\colon \mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K \qquad [x : y : z] \mapsto [\gamma^{d^2+1} x : \gamma y : z]$$

Então $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ possui ordem $d^2 + d + 1$ e $\Phi^* \Omega_d = \gamma \Omega_d$.

[2] aqui, assumimos que p não divide $d^2 + d + 1$

Folheação de Jouanolou: exemplo

Seja $\mathcal{F}_d$ definida por

$$\Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz.$$

Seja γ uma raiz primitiva $(d^2 + d + 1)$-ésima da unidade[2] da unidade e considere

$$\Phi\colon \mathbb{P}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K \qquad [x : y : z] \mapsto [\gamma^{d^2+1} x : \gamma y : z]$$

Então $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ possui ordem $d^2 + d + 1$ e $\Phi^* \Omega_d = \gamma \Omega_d$.

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ não p-fechada e $\Phi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{F})$. Então, $\Phi^* \Delta_{\mathcal{F}} = \Delta_{\mathcal{F}}$.

[2] aqui, assumimos que p não divide $d^2 + d + 1$

Caso $d = 2$

$$\mathcal{F}_2 \colon \Omega_2 = (x^d z - y^3)dx + (xy^2 - z^3)dy + (z^2 y - x^3)dz.$$

ideia da prova da irredutibilidade do p-divisor de $\mathcal{J} := \mathcal{F}_2$:

Caso $d = 2$

$$\mathcal{F}_2\colon \Omega_2 = (x^d z - y^3)dx + (xy^2 - z^3)dy + (z^2 y - x^3)dz.$$

ideia da prova da irredutibilidade do p-divisor de $\mathcal{J} := \mathcal{F}_2$:

- As condições $7 \nmid p + 4$ e $p \not\equiv 1 \mod 3$ implicam que $\Delta_{\mathcal{J}} \neq 0$. Assuma que existe uma curva $\mathcal{J}$-invariante $C = \{F = 0\}$ com $\deg(C) < \deg(\Delta_{\mathcal{J}})$;

Caso $d = 2$

$$\mathcal{F}_2 \colon \Omega_2 = (x^d z - y^3)dx + (xy^2 - z^3)dy + (z^2 y - x^3)dz.$$

ideia da prova da irredutibilidade do p-divisor de $\mathcal{J} := \mathcal{F}_2$:

- As condições $7 \nmid p + 4$ e $p \not\equiv 1 \mod 3$ implicam que $\Delta_{\mathcal{J}} \neq 0$. Assuma que existe uma curva $\mathcal{J}$-invariante $C = \{F = 0\}$ com $\deg(C) < \deg(\Delta_{\mathcal{J}})$;
- podemos escrever:

$$dF \wedge \omega = F\left(\left(\frac{\deg(C)}{4}\right) d\omega + i_R \beta\right)$$

com $\beta \neq 0$ uma 3-forma homogênea em $\mathbb{A}^3_K$ de grau 1;

Caso $d = 2$

$$\mathcal{F}_2 \colon \Omega_2 = (x^d z - y^3)dx + (xy^2 - z^3)dy + (z^2 y - x^3)dz.$$

ideia da prova da irredutibilidade do p-divisor de $\mathcal{J} := \mathcal{F}_2$:

- As condições $7 \nmid p + 4$ e $p \not\equiv 1 \mod 3$ implicam que $\Delta_{\mathcal{J}} \neq 0$. Assuma que existe uma curva $\mathcal{J}$-invariante $C = \{F = 0\}$ com $\deg(C) < \deg(\Delta_{\mathcal{J}})$;
- podemos escrever:

  $$dF \wedge \omega = F\left(\left(\frac{\deg(C)}{4}\right) d\omega + i_R \beta\right)$$

  com $\beta \neq 0$ uma 3-forma homogênea em $\mathbb{A}^3_K$ de grau 1;
- Temos dois casos:
  1. alguma potência Φ^l fixa a curva C: computações implicam $\beta = 0$, contradição;

Caso $d = 2$

$$\mathcal{F}_2 \colon \Omega_2 = (x^d z - y^3)dx + (xy^2 - z^3)dy + (z^2 y - x^3)dz.$$

ideia da prova da irredutibilidade do p-divisor de $\mathcal{J} := \mathcal{F}_2$:

- As condições $7 \nmid p + 4$ e $p \not\equiv 1 \mod 3$ implicam que $\Delta_{\mathcal{J}} \neq 0$. Assuma que existe uma curva $\mathcal{J}$-invariante $C = \{F = 0\}$ com $\deg(C) < \deg(\Delta_{\mathcal{J}})$;
- podemos escrever:

$$dF \wedge \omega = F\left(\left(\frac{\deg(C)}{4}\right) d\omega + i_R \beta\right)$$

  com $\beta \neq 0$ uma 3-forma homogênea em $\mathbb{A}^3_K$ de grau 1;
- Temos dois casos:
  1. alguma potência Φ^l fixa a curva C: computações implicam $\beta = 0$, contradição;
  2. Φ^l não fixa C para todo $l \in \{1, \ldots, 6\}$: em tal caso para qualquer primo P no suporte de $\Delta_{\mathcal{J}}$ temos: $P, \Phi^* P, \ldots, (\Phi^6)^* P$ distintos, o que implica $7 \mid p + 4$, uma contradição;

Folheação de Jouanolou

Corolário

Nas condições do teorema, uma folheação genérica de grau dois no plano projetivo em característica $p > 0$ possui p-divisor irredutível.

- $\mathcal{F}_d$ em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:

$$\omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

$$v_d = z^d \partial_x + x^d \partial_y + y^d \partial_z$$

1. $(p, d) = (5, 2)$:

$$\Delta_{\mathcal{F}_{5,2}} = [i_{v_2^5} \omega_2] = \{X^5 Z^4 + X^4 Y^5 + 2X^3 Y^3 Z^3 + Y^4 Z^5 = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_5})$$

2. $(p, d) = (11, 3)$:

$$\Delta_{\mathcal{F}_{11,3}} = [i_{v_3^{11}} \omega_3] = \{X^{19} Z^8 - 2X^{16} Y^4 Z^7 + \cdots + 3XY^{11} Z^{15} + Y^8 Z^{19} = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{11}})$$

Jouanolou II

Para $d > 2$:

Teorema

[a] *Seja K um corpo algebricamente fechado e de característica $p > 0$. Seja $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que*

- $p < d$ *e* $p \not\equiv 1 \mod 3$;
- $d^2 + d + 1$ *is primo.*

Então a folheação de Jouanolou, $\mathcal{F}_d$, possui p-divisor irredutível ou

$$\Delta_{\mathcal{F}_d} = C + pR$$

com $\deg(C) = pl + d + 2$, $l > 0$ *e* R *não* $\mathcal{F}_d$*-invariante.*

[a] W.Mendson - **Arithmetic aspects of the Jouanolou foliation**

Jouanolou II

Para $d > 2$:

Teorema

[a] *Seja K um corpo algebricamente fechado e de característica $p > 0$. Seja $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que*

- $p < d$ *e* $p \not\equiv 1 \mod 3$;
- $d^2 + d + 1$ *is primo.*

Então a folheação de Jouanolou, $\mathcal{F}_d$, possui p-divisor irredutível ou

$$\Delta_{\mathcal{F}_d} = C + pR$$

com $\deg(C) = pl + d + 2$, $l > 0$ *e R não $\mathcal{F}_d$-invariante.*

[a] W.Mendson - **Arithmetic aspects of the Jouanolou foliation**

Consequência: folheação de Jouanolou $\mathcal{F}_d$ possui única curva algébrica invariante

Jouanolou II

Para $d > 2$:

Teorema

[a] *Seja K um corpo algebricamente fechado e de característica $p > 0$. Seja $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que*

- $p < d$ *e* $p \not\equiv 1 \mod 3$*;*
- $d^2 + d + 1$ *is primo.*

Então a folheação de Jouanolou, $\mathcal{F}_d$, possui p-divisor irredutível ou

$$\Delta_{\mathcal{F}_d} = C + pR$$

com $\deg(C) = pl + d + 2$, $l > 0$ *e R não $\mathcal{F}_d$-invariante.*

[a] W.Mendson - **Arithmetic aspects of the Jouanolou foliation**

Consequência: folheação de Jouanolou $\mathcal{F}_d$ possui única curva algébrica invariante

Observação

[a] *É esperado que $d^2 + d + 1$ é primo para uma infinidade de $d \in \mathbb{Z}_{>0}$. Isso é um caso particular da Conjectura de Bunyakovsky (1857).*

[a] https://mathoverflow.net/questions/438807/primes-of-the-form-d2d1

característica $p = 5$ e $d \leq 100$

d	$d^2 + d + 1$	$\deg(C)$	l	R
6	43	18	2	$\{xyz = 0\}$
12	157	39	5	$\{xyz = 0\}$
17	307	54	7	$\{xyz = 0\}$
21	463	63	8	$\{xyz = 0\}$
27	757	84	11	$\{xyz = 0\}$
41	1723	123	16	$\{xyz = 0\}$
57	3307	174	23	$\{xyz = 0\}$
62	3907	189	25	$\{xyz = 0\}$
66	4423	198	26	$\{xyz = 0\}$
71	5113	213	28	$\{xyz = 0\}$
77	6007	234	31	$\{xyz = 0\}$

- para $d \in \{2, 14, 24, 54, 59, 69, 89, 99\}$, $\Delta_{\mathcal{F}_d}$ é irredutível;
- outros casos: $\Delta_{\mathcal{F}_d} = 0$.

Obrigado ;-)