Conjectura do Jacobiano à la $\mathbb{Z}_p$

Wodson Mendson

UFMG

5 de fevereiro de 2018

Orientador: Israel Vainsencher

Álgebra Linear

Sejam k um corpo e $f : k^n \longrightarrow k^n$ um k-mapa. Fixando uma base, digamos canônica, do k-espaço $k^n = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_n$ podemos representar o mapa f por polinômios $f_1, ..., f_n \in k[X_1, ..., X_n]$ homogêneos de grau 1. Nesse caso, é fácil verificar

Álgebra Linear

Sejam k um corpo e $f : k^n \longrightarrow k^n$ um k-mapa. Fixando uma base, digamos canônica, do k-espaço $k^n = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_n$ podemos representar o mapa f por polinômios $f_1, ..., f_n \in k[X_1, ..., X_n]$ homogêneos de grau 1. Nesse caso, é fácil verificar

- f é injetivo se e só se f é isomorfismo.

Álgebra Linear

Sejam k um corpo e $f : k^n \longrightarrow k^n$ um k-mapa. Fixando uma base, digamos canônica, do k-espaço $k^n = ke_1 \oplus \cdots \oplus ke_n$ podemos representar o mapa f por polinômios $f_1, ..., f_n \in k[X_1, ..., X_n]$ homogêneos de grau 1. Nesse caso, é fácil verificar

- f é injetivo se e só se f é isomorfismo.
- f é isomorfismo se e só se $\det J_f \neq 0$, onde J_f é matriz jacobiana associada a tupla $f = (f_1, ..., f_n)$.

Mapas polinomiais

Sejam R um dominio, $f_1, ..., f_n \in R[X_1, ..., X_n]$ e

$$f = (f_1, ..., f_n) : R^n \longrightarrow R^n$$

o mapa polinomial associado. Dizemos que f é um isomorfismo se existem $g_1, ..., g_n \in R[Y_1, ..., Y_n]$ tais que

$$f_i(g_1, ..., g_n) = Y_i \text{ e } g_k(f_1, ..., f_n) = X_k \text{ para } 1 \leq i, k \leq n.$$

Mapas polinomiais

Sejam R um dominio, $f_1, ..., f_n \in R[X_1, ..., X_n]$ e

$$f = (f_1, ..., f_n) : R^n \longrightarrow R^n$$

o mapa polinomial associado. Dizemos que f é um isomorfismo se existem $g_1, ..., g_n \in R[Y_1, ..., Y_n]$ tais que

$$f_i(g_1, ..., g_n) = Y_i \text{ e } g_k(f_1, ..., f_n) = X_k \text{ para } 1 \leq i, k \leq n.$$

Notações:

- $\mathcal{MP}_n(R)$ = coleção de mapas polinomiais sobre R.
- $\mathcal{MPI}_n(R) := \{f \in \mathcal{MP}_n(R) \mid \ f \text{ é isomorfismo } \}$.
- k = corpo.

Dado $f \in \mathcal{MP}_n(R)$ dizemos que f é um mapa de Keller se $\det J_f = 1$.

O caso linear motiva o seguinte

Problema

Sejam k um corpo e $f_1, ..., f_n \in k[X_1, ..., X_n]$ e $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ o mapa associado. Seja J_f a matriz jacobiana associada.

O caso linear motiva o seguinte

Problema

Sejam k um corpo e $f_1, ..., f_n \in k[X_1, ..., X_n]$ e $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ o mapa associado. Seja J_f a matriz jacobiana associada.

- *f é injetivo se e só se f é isomorfismo?*

O caso linear motiva o seguinte

Problema

Sejam k um corpo e $f_1, ..., f_n \in k[X_1, ..., X_n]$ e $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ o mapa associado. Seja J_f a matriz jacobiana associada.

- *f é injetivo se e só se f é isomorfismo?*
- *f é isomorfismo se e só se $J_f \in GL_n(k[X_1, ..., X_n])$?*

O caso linear motiva o seguinte

Problema

Sejam k um corpo e $f_1, ..., f_n \in k[X_1, ..., X_n]$ e $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ o mapa associado. Seja J_f a matriz jacobiana associada.

- *f é injetivo se e só se f é isomorfismo?*
- *f é isomorfismo se e só se $J_f \in GL_n(k[X_1, ..., X_n])$?*

Na generalidade em questão: NÃO e NÃO.

O caso linear motiva o seguinte

Problema

Sejam k um corpo e $f_1, ..., f_n \in k[X_1, ..., X_n]$ e $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ o mapa associado. Seja J_f a matriz jacobiana associada.

- *f é injetivo se e só se f é isomorfismo?*
- *f é isomorfismo se e só se $J_f \in GL_n(k[X_1, ..., X_n])$?*

Na generalidade em questão: NÃO e NÃO.

- Se $k = \overline{\mathbb{F}_p}$ então $f = (X_1 - X_1^p, ..., X_n - X_n^p) \in \mathcal{MP}_n(k)$ é tal que $\det J_f = 1$ mas f não é isomorfismo.

O caso linear motiva o seguinte

Problema

Sejam k um corpo e $f_1, ..., f_n \in k[X_1, ..., X_n]$ e $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ o mapa associado. Seja J_f a matriz jacobiana associada.

- *f é injetivo se e só se f é isomorfismo?*
- *f é isomorfismo se e só se $J_f \in GL_n(k[X_1, ..., X_n])$?*

Na generalidade em questão: NÃO e NÃO.

- Se $k = \overline{\mathbb{F}_p}$ então $f = (X_1 - X_1^p, ..., X_n - X_n^p) \in \mathcal{MP}_n(k)$ é tal que $\det J_f = 1$ mas f não é isomorfismo.
- Se $k = \mathbb{Q}$ o mapa $f = (X_1^3, ..., X_n^3) \in \mathcal{MP}_n(k)$ é injetivo e não é isomorfismo.

Mas, restringindo ao caso em que k é algebricamente fechado com $char(k) = 0$ temos

Mas, restringindo ao caso em que k é algebricamente fechado com $char(k) = 0$ temos

Teorema (Cynk-Rusek)

Seja $X \subset \mathbb{A}_k^n$ uma variedade afim e $f : X \longrightarrow X$ um endomorfismo. São equivalentes:

(i) f é bijeção.

(ii) f é injetivo.

(iii) f é isomorfismo.

Mas, restringindo ao caso em que k é algebricamente fechado com $char(k) = 0$ temos

Teorema (Cynk-Rusek)

Seja $X \subset \mathbb{A}_k^n$ uma variedade afim e $f : X \longrightarrow X$ um endomorfismo. São equivalentes:

(i) f é bijeção.

(ii) f é injetivo.

(iii) f é isomorfismo.

Conjectura do Jacobiano (Keller - 1939)

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ $(n \geq 2)$ mapa com $\det J_f = 1$. Então f é isomorfismo.

Injetividade $\Longrightarrow$ Sobrejetividade

Seja $W \subset \mathbb{A}_k^n$ uma variedade afim sobre um corpo algebricamente fechado k com $char(k) \geq 0$ e $G : W \hookrightarrow W$ um endomorfismo injetivo.

Injetividade $\Longrightarrow$ Sobrejetividade

Seja $W \subset \mathbb{A}_k^n$ uma variedade afim sobre um corpo algebricamente fechado k com $char(k) \geq 0$ e $G : W \hookrightarrow W$ um endomorfismo injetivo.

Sejam $G_1, ..., G_n \in k[X_1, ..., X_n]$ polinômios representando o mapa G. Vamos formular as condições de **não-sobrejetividade, injetividade e pertinência** em termos de relações polinomiais.

Injetividade $\implies$ Sobrejetividade

Seja $W \subset \mathbb{A}_k^n$ uma variedade afim sobre um corpo algebricamente fechado k com $char(k) \geq 0$ e $G : W \hookrightarrow W$ um endomorfismo injetivo.

Sejam $G_1, ..., G_n \in k[X_1, ..., X_n]$ polinômios representando o mapa G. Vamos formular as condições de **não-sobrejetividade, injetividade e pertinência** em termos de relações polinomiais.

Para isso, denote $F_1, ..., F_r \in k[X_1, ..., X_n]$ as equações definindo a variedade W.

Injetividade $\implies$ Sobrejetividade

Seja $W \subset \mathbb{A}_k^n$ uma variedade afim sobre um corpo algebricamente fechado k com $char(k) \geq 0$ e $G : W \hookrightarrow W$ um endomorfismo injetivo.

Sejam $G_1, ..., G_n \in k[X_1, ..., X_n]$ polinômios representando o mapa G. Vamos formular as condições de **não-sobrejetividade, injetividade e pertinência** em termos de relações polinomiais.

Para isso, denote $F_1, ..., F_r \in k[X_1, ..., X_n]$ as equações definindo a variedade W.

Pertinência: considere os ideais $I_1 = \langle F_1(G(X)), ..., F_r(G(X)) \rangle$ e $I_2 = \langle F_1(X), ..., F_r(X) \rangle$ em $k[X, Y]$. $G(W) \subset W$ se e só se para cada $1 \leq k \leq n$ existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que

$$F_k(G(X))^{n_k} = \sum_h r_h(X) F_h(X).$$

Injetividade: considere os ideais

$$I = \langle X - Y \rangle \text{ e } J = \langle F(X), F(Y), G(X) - G(Y) \rangle \text{ em } k[X, Y].$$

G é injetivo se e só se para cada $1 \leq k \leq n$ existe $m_k \in \mathbb{N}$ e uma relação da forma $(X_k - Y_k)^{m_k} =$

$$\sum_{l_1} A_{l_1}(X,Y) F_{l_1}(X) + \sum_{l_2} B_{l_2}(X,Y) F_{l_1}(Y) + \sum_{l_1} A_{l_1}(X,Y)(G_{l_3}(X) - G_{l_3}(Y)).$$

Injetividade: considere os ideais

$$I = \langle X - Y \rangle \text{ e } J = \langle F(X), F(Y), G(X) - G(Y) \rangle \text{ em } k[X, Y].$$

G é injetivo se e só se para cada $1 \leq k \leq n$ existe $m_k \in \mathbb{N}$ e uma relação da forma $(X_k - Y_k)^{m_k} =$

$$\sum_{l_1} A_{l_1}(X,Y)F_{l_1}(X) + \sum_{l_2} B_{l_2}(X,Y)F_{l_1}(Y) + \sum_{l_1} A_{l_1}(X,Y)(G_{l_3}(X) - G_{l_3}(Y)).$$

Não-sobrejetividade: o ideal

$$T = \langle F_1(X), ..., F_r(X), F_1(Y), ..., F_r(Y), G_1(X) - Y_1, ..., G_n(X) - Y_n \rangle$$

não tem zeros. Assim,

$$1 = \sum_i a(X,Y)F_i(X) + \sum_j b(X,Y)F_j(Y) + \sum_k c(X,Y)(G_k(X) - Y_k)$$

Seja $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ coleção de todos os coeficientes que ocorrem nas relações polinomiais acima. Agora, dividimos em casos:

Seja $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ coleção de todos os coeficientes que ocorrem nas relações polinomiais acima. Agora, dividimos em casos:

- $char(k) = p > 0$: Seja $R = \mathbb{F}_p[\{\alpha_i\}]$ o subanel obtido por adjunção. Seja $\mathfrak{m} \in Spec_m(R)$. Pelo lema de Zariski, sabemos que $R/\mathfrak{m}$ é uma extensão algébrica finita de $\mathbb{F}_p$. Em particular um corpo finito. Agora, reduzindo as relações polinomiais obtidas acima, obtemos um mapa polinomial $\overline{G} : X(R/\mathfrak{m}) \longrightarrow X(R/\mathfrak{m})$ injetivo mas não sobrejetivo. Absurdo já que $\#X(R/\mathfrak{m}) < \infty$.

Seja $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ coleção de todos os coeficientes que ocorrem nas relações polinomiais acima. Agora, dividimos em casos:

- $char(k) = p > 0$: Seja $R = \mathbb{F}_p[\{\alpha_i\}]$ o subanel obtido por adjunção. Seja $\mathfrak{m} \in Spec_m(R)$. Pelo lema de Zariski, sabemos que $R/\mathfrak{m}$ é uma extensão algébrica finita de $\mathbb{F}_p$. Em particular um corpo finito. Agora, reduzindo as relações polinomiais obtidas acima, obtemos um mapa polinomial $\overline{G} : X(R/\mathfrak{m}) \longrightarrow X(R/\mathfrak{m})$ injetivo mas não sobrejetivo. Absurdo já que $\#X(R/\mathfrak{m}) < \infty$.

- $char(k) = 0$: Seja $R = \mathbb{Z}[\{\alpha_i\}]$ o subanel obtido por adjunção. Seja $\mathfrak{m} \in Spec_m(R)$. Se $R/\mathfrak{m}$ é um corpo finito podemos repetir o argumento acima e chegar a uma contradição.

Seja $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ coleção de todos os coeficientes que ocorrem nas relações polinomiais acima. Agora, dividimos em casos:

- $char(k) = p > 0$: Seja $R = \mathbb{F}_p[\{\alpha_i\}]$ o subanel obtido por adjunção. Seja $\mathfrak{m} \in Spec_m(R)$. Pelo lema de Zariski, sabemos que $R/\mathfrak{m}$ é uma extensão algébrica finita de $\mathbb{F}_p$. Em particular um corpo finito. Agora, reduzindo as relações polinomiais obtidas acima, obtemos um mapa polinomial $\overline{G} : X(R/\mathfrak{m}) \longrightarrow X(R/\mathfrak{m})$ injetivo mas não sobrejetivo. Absurdo já que $\#X(R/\mathfrak{m}) < \infty$.

- $char(k) = 0$: Seja $R = \mathbb{Z}[\{\alpha_i\}]$ o subanel obtido por adjunção. Seja $\mathfrak{m} \in Spec_m(R)$. Se $R/\mathfrak{m}$ é um corpo finito podemos repetir o argumento acima e chegar a uma contradição. Isso é consequência do seguinte fato algébrico:

Teorema

Seja R uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito e $\mathfrak{m} \in Spec(R)$. Então

$$\mathfrak{m} \in Spec_m(R) \Longleftrightarrow R/\mathfrak{m} \text{ é um corpo finito}$$

Aplicações

Dado um mapa $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ defina o grau de f pondo

$$deg(f) := \mathbf{Max}\{deg(f_1), \cdots, deg(f_n)\}.$$

Aplicações

Dado um mapa $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ defina o grau de f pondo

$$deg(f) := \mathbf{Max}\{deg(f_1), \cdots, deg(f_n)\}.$$

Teorema (Wang)

Sejam k um corpo, algebricamente fechado com $char(k) = 0$, e $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ um mapa de Keller com $deg(f) < 3$. Então f é invertível.

Demonstração.

Sem perda de generalidade podemos supor $f(0) = 0$. Pelo teorema de Cynk-Rusek é suficiente mostrar que f é injetivo. Suponha que tal não ocorra e sejam $P \neq Q \in k^n$ tais que $f(P) = f(Q)$. Sem perda podemos supor $P = 0$.

Demonstração.

Sem perda de generalidade podemos supor $f(0) = 0$. Pelo teorema de Cynk-Rusek é suficiente mostrar que f é injetivo. Suponha que tal não ocorra e sejam $P \neq Q \in k^n$ tais que $f(P) = f(Q)$. Sem perda podemos supor $P = 0$. Escreva $f = (f_1, ..., f_n) = f_{(1)} + f_{(2)}$ onde $f_{(d)} = (f_1^{(d)}, ..., f_n^{(d)})$ é a componente homogênea de grau d. Seja $c := 1/2 \in k$.

Demonstração.

Sem perda de generalidade podemos supor $f(0) = 0$. Pelo teorema de Cynk-Rusek é suficiente mostrar que f é injetivo. Suponha que tal não ocorra e sejam $P \neq Q \in k^n$ tais que $f(P) = f(Q)$. Sem perda podemos supor $P = 0$. Escreva $f = (f_1, ..., f_n) = f_{(1)} + f_{(2)}$ onde $f_{(d)} = (f_1^{(d)}, ..., f_n^{(d)})$ é a componente homogênea de grau d. Seja $c := 1/2 \in k$. Então

$$0 = f(Q) = f_{(1)}(Q) + 2cf_{(2)}(Q) = \frac{\partial[Tf_{(1)}(Q) + T^2 f_{(2)}(Q)]}{\partial T}|_{T=c} =$$

$\frac{\partial f(TQ)}{\partial T}|_{T=c} = J_f(cQ).Q,$

Demonstração.

Sem perda de generalidade podemos supor $f(0) = 0$. Pelo teorema de Cynk-Rusek é suficiente mostrar que f é injetivo. Suponha que tal não ocorra e sejam $P \neq Q \in k^n$ tais que $f(P) = f(Q)$. Sem perda podemos supor $P = 0$. Escreva $f = (f_1, ..., f_n) = f_{(1)} + f_{(2)}$ onde $f_{(d)} = (f_1^{(d)}, ..., f_n^{(d)})$ é a componente homogênea de grau d. Seja $c := 1/2 \in k$. Então

$$0 = f(Q) = f_{(1)}(Q) + 2cf_{(2)}(Q) = \frac{\partial[Tf_{(1)}(Q) + T^2 f_{(2)}(Q)]}{\partial T}|_{T=c} =$$

$\frac{\partial f(TQ)}{\partial T}|_{T=c} = J_f(cQ).Q,$

o que é um absurdo pela condição de Keller:

$$\det J_f = 1.$$

$\square$

Aplicações

O seguinte resultado é importante nas considerações p-ádicas:

Teorema (Connell-van der Dries)

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{C})$ um mapa de Keller não injetivo i.e. um contraexemplo para Conjectura do Jacobiano. Então existe um contra-exemplo $f \in \mathcal{MP}_N(\mathbb{C})$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Aplicações

O seguinte resultado é importante nas considerações p-ádicas:

Teorema (Connell-van der Dries)

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{C})$ um mapa de Keller não injetivo i.e. um contraexemplo para Conjectura do Jacobiano. Então existe um contra-exemplo $f \in \mathcal{MP}_N(\mathbb{C})$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Para provar isso, usaremos o seguinte lema:

Lema

Seja $K|\mathbb{Q}$ uma extensão finita galoisiana de grau $m = [K : \mathbb{Q}] > 0$ e $f \in \mathcal{MP}_n(K)$ um mapa de Keller não injetivo. Então existe um mapa de Keller $g \in \mathcal{MP}_{nm}(\mathbb{Q})$ não injetivo.

Demostração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{C})$ um mapa de Keller não injetivo, digamos $f(P) = f(Q)$ para $P \neq Q$. Por uma mudança de coordenadas podemos supor $P = (0, ..., 0)$ e $Q = (1, 0, ..., 0)$.

Demostração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{C})$ um mapa de Keller não injetivo, digamos $f(P) = f(Q)$ para $P \neq Q$. Por uma mudança de coordenadas podemos supor $P = (0, ..., 0)$ e $Q = (1, 0, ..., 0)$.

Substituindo cada coeficiente de f por uma variável obtemos um mapa polinomial $F \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}[Y_1, ..., Y_d])$. A condição em $\det J_f$ implica que $\det J_F = 1 + p(X, Y)$ por algum $p(X, Y) \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_d]$.

Demostração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{C})$ um mapa de Keller não injetivo, digamos $f(P) = f(Q)$ para $P \neq Q$. Por uma mudança de coordenadas podemos supor $P = (0, ..., 0)$ e $Q = (1, 0, ..., 0)$.

Substituindo cada coeficiente de f por uma variável obtemos um mapa polinomial $F \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}[Y_1, ..., Y_d])$. A condição em $\det J_f$ implica que $\det J_F = 1 + p(X, Y)$ por algum $p(X, Y) \in \mathbb{Z}[X_1, ..., X_n, Y_1, ..., Y_d]$.

A condição $F(P) = F(Q)$ pode ser expressa em relações polinomiais nas variáveis $Y_1, ..., Y_d$, digamos $G_1, ..., G_m \in \mathbb{Z}[Y]$. Ainda, a condição $\det J_F = 1$ pode ser expressa em relações polinomiais na variável Y, digamos $h_1 = \cdots = h_r = 0$.

Considere o ideal

$$I = \langle G_1, ..., G_m, h_1, ..., h_r \rangle \subset \mathbb{Z}[Y_1, ..., Y_d] \subset \overline{\mathbb{Q}}[Y_1, ..., Y_d].$$

Considere o ideal

$$I = \langle G_1, ..., G_m, h_1, ..., h_r \rangle \subset \mathbb{Z}[Y_1, ..., Y_d] \subset \overline{\mathbb{Q}}[Y_1, ..., Y_d].$$

Sobre $\mathbb{C}$, sabemos que o ideal I possui um zero. Em particular, pelo Nullstelenzatz $1 \notin I$. Assim, I possui um zero sobre $\overline{\mathbb{Q}}$.

Considere o ideal

$$I = \langle G_1, ..., G_m, h_1, ..., h_r \rangle \subset \mathbb{Z}[Y_1, ..., Y_d] \subset \overline{\mathbb{Q}}[Y_1, ..., Y_d].$$

Sobre $\mathbb{C}$, sabemos que o ideal I possui um zero. Em particular, pelo Nullstelenzatz $1 \notin I$. Assim, I possui um zero sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Tal zero "produz" um contraexemplo para conjectura do Jacobiano com coeficientes em uma extensão galoisiana finita $K|\mathbb{Q}$.

Considere o ideal

$$I = \langle G_1, ..., G_m, h_1, ..., h_r \rangle \subset \mathbb{Z}[Y_1, ..., Y_d] \subset \overline{\mathbb{Q}}[Y_1, ..., Y_d].$$

Sobre $\mathbb{C}$, sabemos que o ideal I possui um zero. Em particular, pelo Nullstelenzatz $1 \notin I$. Assim, I possui um zero sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Tal zero "produz" um contraexemplo para conjectura do Jacobiano com coeficientes em uma extensão galoisiana finita $K|\mathbb{Q}$.

Usando o lema acima e um argumento de cancelamento de denominadores garantimos que existe um contraexemplo $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{C})$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e com $\det J_f = 1$. Isso encerra a prova.

Considere o ideal

$$I = \langle G_1, ..., G_m, h_1, ..., h_r \rangle \subset \mathbb{Z}[Y_1, ..., Y_d] \subset \overline{\mathbb{Q}}[Y_1, ..., Y_d].$$

Sobre $\mathbb{C}$, sabemos que o ideal I possui um zero. Em particular, pelo Nullstelenzatz $1 \notin I$. Assim, I possui um zero sobre $\overline{\mathbb{Q}}$. Tal zero "produz" um contraexemplo para conjectura do Jacobiano com coeficientes em uma extensão galoisiana finita $K|\mathbb{Q}$.

Usando o lema acima e um argumento de cancelamento de denominadores garantimos que existe um contraexemplo $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{C})$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e com $\det J_f = 1$. Isso encerra a prova.

Corolário

Conjectura do Jacobiano sobre $\mathbb{Z}$ é equivalente a conjectura do Jacobiano sobre $\mathbb{C}$.

Reduções

É suficiente considerar o caso $deg(f) = 3$:

Reduções

É suficiente considerar o caso $deg(f) = 3$:

Teorema (Connell-Bass-Wright)

Suponha que para, $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ e qualquer mapa $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ na forma $f = X + H$ com JH matriz nilpotente e H homogêneo de grau 3 o mapa f é invertível. Então a Conjectura do Jacobiano (sobre k) é verdadeira.

Reduções

É suficiente considerar o caso $deg(f) = 3$:

Teorema (Connell-Bass-Wright)

Suponha que para, $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ e qualquer mapa $f \in \mathcal{MP}_n(k)$ na forma $f = X + H$ com JH matriz nilpotente e H homogêneo de grau 3 o mapa f é invertível. Então a Conjectura do Jacobiano (sobre k) é verdadeira.

Existe um refinamento devido a Essen-Bondt:

Teorema (Essen-Bondt)

*Suponha que para, $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ e qualquer mapa $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{C})$ na forma $f = X + H$ com H homogêneo cúbico e JH matriz nilpotente **simétrica** o mapa f é invertível. Então a Conjectura do Jacobiano (sobre $\mathbb{C}$) é verdadeira.*

Redução do grau

Daremos um argumento para redução de grau:

Teorema

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(k)$. Então existem $G, H \in \mathcal{MP}_{n+m}(k)$ mapas invertíveis para algum $m \in \mathbb{N}$, tais que $g := G \circ f^{[m]} \circ H$ satisfaz $deg(g) \leq 3$. Aqui, $f^{[m]}$ denota a m-expansão de f i.e. $f^{[m]} = (f_1, ..., f_n, X_{n+1}, ..., X_{n+m})$.

Demonstração.

Denote d o grau de f. A prova será por indução em d. Se $d < 4$ então OK.

Demonstração.

Denote d o grau de f. A prova será por indução em d. Se $d < 4$ então OK. Se $d > 4$ seja M um monômio de grau > 3 que ocorre em f. Sem perda de generalidade podemos supor M ocorre em f_1.

Demonstração.

Denote d o grau de f. A prova será por indução em d. Se $d < 4$ então OK. Se $d > 4$ seja M um monômio de grau > 3 que ocorre em f. Sem perda de generalidade podemos supor M ocorre em f_1. Escreva $M = PQ$ onde $deg(P) \leq d - 2$ e $deg(Q) \leq d - 2$. Considere os mapas

$$H = (X_1, ..., X_n, X_{n+1} + P, X_{n+2} + Q)$$

$$G = (X_1 - X_{n+1}X_{n+2}, X_2, ..., X_{n+2}).$$

Demonstração.

Denote d o grau de f. A prova será por indução em d. Se $d < 4$ então OK. Se $d > 4$ seja M um monômio de grau > 3 que ocorre em f. Sem perda de generalidade podemos supor M ocorre em f_1. Escreva $M = PQ$ onde $deg(P) \leq d - 2$ e $deg(Q) \leq d - 2$. Considere os mapas

$$H = (X_1, ..., X_n, X_{n+1} + P, X_{n+2} + Q)$$

$$G = (X_1 - X_{n+1}X_{n+2}, X_2, ..., X_{n+2}).$$

Seja $g := G \circ f^{[2]} \circ H$. Considerando g_1 temos

$$g_1 = f_1 - PX_{n+2} - QX_{n+1} - M - X_{n+1}X_{n+2}.$$

Demonstração.

Denote d o grau de f. A prova será por indução em d. Se $d < 4$ então OK. Se $d > 4$ seja M um monômio de grau > 3 que ocorre em f. Sem perda de generalidade podemos supor M ocorre em f_1. Escreva $M = PQ$ onde $deg(P) \leq d - 2$ e $deg(Q) \leq d - 2$. Considere os mapas

$$H = (X_1, ..., X_n, X_{n+1} + P, X_{n+2} + Q)$$

$$G = (X_1 - X_{n+1}X_{n+2}, X_2, ..., X_{n+2}).$$

Seja $g := G \circ f^{[2]} \circ H$. Considerando g_1 temos

$$g_1 = f_1 - PX_{n+2} - QX_{n+1} - M - X_{n+1}X_{n+2}.$$

Por um argumento análogo e por um número finito de passos podemos eliminar todos os monômios de grau d que ocorrem em g. Assim, obtemos um mapa de grau $d^{'} < d$ e por indução obtemos o resultado. $\square$

Abordagem $\mathbb{Z}_p$

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um dominio local. Se $f = (f_1, ..., f_n) \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é um mapa linear de Keller é fácil verificar que existe $b \in \mathcal{O}^n$ tal que $f_j(b) \notin \mathcal{M}$ para algum j.

Abordagem $\mathbb{Z}_p$

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um dominio local. Se $f = (f_1, ..., f_n) \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é um mapa linear de Keller é fácil verificar que existe $b \in \mathcal{O}^n$ tal que $f_j(b) \notin \mathcal{M}$ para algum j. O caso geral é um problema em aberto:

Conjectura Unimodular

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ $(n > 1)$ um mapa de Keller sobre um dominio local $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ com $char(\mathcal{O}) = 0$. Seja $\overline{f} \in \mathcal{MP}_n(k)$ o mapa obtido por redução $\mod \mathcal{M}$. Então $\overline{f}$ é não nulo.

Dominios Unimodulares

Definição

Sejam $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *um dominio local e* $d \in \mathbb{N}$ *e* $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$.

Dominios Unimodulares

Definição

Sejam $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *um dominio local e* $d \in \mathbb{N}$ *e* $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$*.Dizemos que*

- f *é unimodular se satisfaz condição da conjectura unimodular.*

Dominios Unimodulares

Definição

Sejam $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *um dominio local e* $d \in \mathbb{N}$ *e* $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$*.Dizemos que*

- f *é unimodular se satisfaz condição da conjectura unimodular.*
- $\mathcal{O}$ *é um dominio d-**unimodular** se para qualquer mapa de Keller* $f = (f_1, ..., f_n) \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$*, com* $deg(f) \leq d$ *satisfaz condição da conjectura unimodular*

Dominios Unimodulares

Definição

Sejam $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um dominio local e $d \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$.Dizemos que

- *f é unimodular se satisfaz condição da conjectura unimodular.*
- *$\mathcal{O}$ é um dominio d-**unimodular** se para qualquer mapa de Keller $f = (f_1, ..., f_n) \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$, com $deg(f) \leq d$ satisfaz condição da conjectura unimodular*
- *$\mathcal{O}$ é um dominio **unimodular** se é d-unimodular para todo $d \in \mathbb{N}$.*

Para uma classe de aneis locais a conjectura acima é verdadeira:

Teorema

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um dominio local com k um corpo infinito. Então qualquer mapa de Keller $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ $(n > 1)$ é unimodular.

Para uma classe de aneis locais a conjectura acima é verdadeira:

Teorema

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um dominio local com k um corpo infinito. Então qualquer mapa de Keller $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ $(n > 1)$ é unimodular.

Por outro lado:

Teorema

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um dominio local com $char(\mathcal{O}) > 0$ e k finito. Então $\mathcal{O}$ não é unimodular.

Para uma classe de aneis locais a conjectura acima é verdadeira:

Teorema

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um dominio local com k um corpo infinito. Então qualquer mapa de Keller $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ $(n > 1)$ é unimodular.

Por outro lado:

Teorema

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um dominio local com $char(\mathcal{O}) > 0$ e k finito. Então $\mathcal{O}$ não é unimodular.

De fato, se $char(\mathcal{O}) = p > 0$ e $q = \#k$ considere o mapa

$$f = (X_1 - X_1^q, ..., X_n - X_n^q) \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$$

e note que f não é unimodular já que qualquer elemento do corpo residuo satisfaz $\alpha^q = \alpha$.

Observação

$char(\mathcal{O})$	$char(k)$	$\#k$	*tipo*
$p = 0$	$q > 0$	∞	*unimodular*
$p = 0$	$q > 0$	$< \infty$	*?*
$p = 0$	$q = 0$	∞	*unimodular*
$p > 0$	$q = p$	$< \infty$	*não unimodular*
$p > 0$	$q = p$	∞	*unimodular*

O caso interessante é

$$(char(\mathcal{O}), char(k), \#k, \text{tipo}) = (0, p, < \infty, ?)$$

onde $p > 0$.

Conjectura do Jacobiano e Unimodularidade

Teorema

Suponha que a Conjectura do Jacobiano sobre $\mathbb{C}$ é verdadeira. Então qualquer dominio local $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ com char$(\mathcal{O}) = 0$ é unimodular.

Conjectura do Jacobiano e Unimodularidade

Teorema

Suponha que a Conjectura do Jacobiano sobre $\mathbb{C}$ é verdadeira. Então qualquer dominio local $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ com $char(\mathcal{O}) = 0$ é unimodular.

Demonstração.

É um fato geral que se Conjectura do Jacobiano é verdadeira sobre $\mathbb{C}$ então é verdadeira sobre qualquer dominio R com $char(R) = 0$.

Conjectura do Jacobiano e Unimodularidade

Teorema

Suponha que a Conjectura do Jacobiano sobre $\mathbb{C}$ é verdadeira. Então qualquer dominio local $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ com $char(\mathcal{O}) = 0$ é unimodular.

Demonstração.

É um fato geral que se Conjectura do Jacobiano é verdadeira sobre $\mathbb{C}$ então é verdadeira sobre qualquer dominio R com $char(R) = 0$.Em particular, dado um mapa de Keller $f = (f_1, ..., f_n) \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ temos que $f \circ g = X$ onde $g = f^{-1}$. Seja $b = (b_1, ..., b_n) \in \mathcal{O}^n$ um vetor unimodular e considere $c := g(b)$.

$\square$

Vale a reciproca no seguinte sentido:

Teorema

A Conjectura do Jacobiano (sobre $\mathbb{C}$) é equivalente a seguinte afirmação:

- *Qualquer dominio local $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ com $char(\mathcal{O}) = 0$ é unimodular.*

Vale a reciproca no seguinte sentido:

Teorema

A Conjectura do Jacobiano (sobre $\mathbb{C}$) é equivalente a seguinte afirmação:

- *Qualquer dominio local* $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *com* $char(\mathcal{O}) = 0$ *é unimodular.*

Isso é consequência do seguinte

Teorema (Essen-Lipton)

Suponha que para quase todo primo $p \in \mathbb{Z}$ *o dominio* $\mathbb{Z}_p$ *é unimodular. Então a Conjectura do Jacobiano (sobre* $\mathbb{C}$*) é verdadeira.*

2-transitividade

Sejam R um dominio, $n \in \mathbb{N}$ e denote por $S_R(n,2)$ a categoria cujos objetos são pares ordenados (P,Q) com $P,Q \in R^n$ distintos. Diremos que (P,Q) é um 2-set em dimensão n. Um mapa entre (P_1,Q_1) e (P_2,Q_2) é a restrição de um mapa polinomial $f \in \mathcal{MP}_n(R)$ com a condição $f(P_1) = P_2$ e $f(Q_1) = Q_2$.

2-transitividade

Sejam R um dominio, $n \in \mathbb{N}$ e denote por $S_R(n,2)$ a categoria cujos objetos são pares ordenados (P,Q) com $P,Q \in R^n$ distintos. Diremos que (P,Q) é um 2-set em dimensão n. Um mapa entre (P_1,Q_1) e (P_2,Q_2) é a restrição de um mapa polinomial $f \in \mathcal{MP}_n(R)$ com a condição $f(P_1) = P_2$ e $f(Q_1) = Q_2$.

Teorema

Sejam $X = (a,b)$ e $Y = (c,d)$ 2-sets em dimensão n sobre um dominio R. Então

- $Hom(X,Y) \neq \varnothing \iff \langle d-c\rangle \subset \langle b-a\rangle$.
- $X \cong Y \iff \langle d-c\rangle = \langle b-a\rangle$.

2-transitividade

Sejam R um dominio, $n \in \mathbb{N}$ e denote por $S_R(n,2)$ a categoria cujos objetos são pares ordenados (P,Q) com $P,Q \in R^n$ distintos. Diremos que (P,Q) é um 2-set em dimensão n. Um mapa entre (P_1,Q_1) e (P_2,Q_2) é a restrição de um mapa polinomial $f \in \mathcal{MP}_n(R)$ com a condição $f(P_1) = P_2$ e $f(Q_1) = Q_2$.

Teorema

Sejam $X = (a,b)$ e $Y = (c,d)$ 2-sets em dimensão n sobre um dominio R. Então

- $Hom(X,Y) \neq \varnothing \iff \langle d-c \rangle \subset \langle b-a \rangle$.
- $X \cong Y \iff \langle d-c \rangle = \langle b-a \rangle$.

Teorema

Seja R um PID e $X = (a,b)$, $Y = (c,d)$ 2-sets em dimensão n sobre R. Se $X \cong Y$ então existe um automorfismo Keller afim $g \in \mathcal{MP}_n(R)$ tal que $g(a) = c$ e $g(b) = d$.

Conjectura da Invariância

Conjectura da Invariância

Sejam $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *um dominio local com* $char(\mathcal{O}) = 0$ *e* $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ *um mapa de Keller unimodular. Então*

$$f - f(a) \qquad e \qquad f \circ g \circ f$$

são mapas unimodulares para quaisquer $a \in \mathcal{O}^n$ *e* $g \in Aut_n(\mathcal{O})$ *automorfismo Keller afim.*

Conjectura da Invariância

Conjectura da Invariância

Sejam $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *um dominio local com* $char(\mathcal{O}) = 0$ *e* $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ *um mapa de Keller unimodular. Então*

$$f - f(a) \qquad e \qquad f \circ g \circ f$$

são mapas unimodulares para quaisquer $a \in \mathcal{O}^n$ *e* $g \in Aut_n(\mathcal{O})$ *automorfismo Keller afim.*

Observação

Como no caso unimodular, se k *é infinito então a conjectura acima é verdadeira. De fato, é claro que unimodularidade* $\Longrightarrow$ *invariância. No caso* $char(\mathcal{O}) = p > 0$ *com* k *finito a conjectura é falsa.*

Dominios Invariantes

Definição

Sejam $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *um dominio local e* $d \in \mathbb{N}$ *e* $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$.

Dominios Invariantes

Definição

Sejam $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *um dominio local e* $d \in \mathbb{N}$ *e* $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$*. Dizemos que*

- f *é um* ***mapa invariante*** *se é Keller, unimodular e para todo* $g \in Aut_n(\mathcal{O})$ *automorfismo Keller e* $a \in \mathcal{O}^n$ *temos* $f \circ g \circ f$ *e* $f - f(a)$ *mapas unimodulares.*

Dominios Invariantes

Definição

Sejam $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um dominio local e $d \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$. Dizemos que

- *f é um **mapa invariante** se é Keller, unimodular e para todo $g \in Aut_n(\mathcal{O})$ automorfismo Keller e $a \in \mathcal{O}^n$ temos $f \circ g \circ f$ e $f - f(a)$ mapas unimodulares.*
- *f é um **mapa fortemente invariante** se é invariante e para quaisquer automorfismos afim Keller $g_1, \cdots, g_m \in Aut_n(\mathcal{O})$ temos $f_1 \circ \cdots \circ f_m$ um mapa invariante onde $f_i = f \circ g_i$.*

Dominios Invariantes

Definição

Sejam $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um dominio local e $d \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$. Dizemos que

- *f é um **mapa invariante** se é Keller, unimodular e para todo $g \in Aut_n(\mathcal{O})$ automorfismo Keller e $a \in \mathcal{O}^n$ temos $f \circ g \circ f$ e $f - f(a)$ mapas unimodulares.*
- *f é um **mapa fortemente invariante** se é invariante e para quaisquer automorfismos afim Keller $g_1, \cdots, g_m \in Aut_n(\mathcal{O})$ temos $f_1 \circ \cdots \circ f_m$ um mapa invariante onde $f_i = f \circ g_i$.*
- *$\mathcal{O}$ é um dominio invariante se qualquer mapa Keller e unimodular $g \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ $(n > 1)$ é invariante.*

Lema

Seja R um dominio e $f \in \mathcal{MP}_n(R)$. Suponha que $f(a) = f(b)$ para alguns $a, b \in R^n$ distintos. Então,

(a) Se $\det J_f(0) = 1$ *então* $\langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \rangle = R$.

(b) Se $\det J_f = 1$ *então* $\langle a_1 - b_1, ..., a_n - b_n \rangle = R$

Lema

Seja R um dominio e $f \in \mathcal{MP}_n(R)$. Suponha que $f(a) = f(b)$ para alguns $a, b \in R^n$ distintos. Então,

(a) Se $\det J_f(0) = 1$ *então* $\langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \rangle = R$.

(b) Se $\det J_f = 1$ *então* $\langle a_1 - b_1, ..., a_n - b_n \rangle = R$

Demonstração.

É suficiente mostrar (a). Sem perda de generalidade podemos supor R dominio noetheriano e $f(0) = 0$. Nesse caso, seja g a inversa formal de f sobre R.

Lema

Seja R um dominio e $f \in \mathcal{MP}_n(R)$. Suponha que $f(a) = f(b)$ para alguns $a, b \in R^n$ distintos. Então,

(a) Se $\det J_f(0) = 1$ *então* $\langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \rangle = R$.

(b) Se $\det J_f = 1$ *então* $\langle a_1 - b_1, ..., a_n - b_n \rangle = R$

Demonstração.

É suficiente mostrar (a). Sem perda de generalidade podemos supor R dominio noetheriano e $f(0) = 0$. Nesse caso, seja g a inversa formal de f sobre R. Suponha que $I := \langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \rangle$ seja um ideal próprio e seja $\mathfrak{m}$ um ideal maximal sobre I. Considere $\tilde{R}$ o completamento $\mathfrak{m}$-ádico de R.

Lema

Seja R um dominio e $f \in \mathcal{MP}_n(R)$. Suponha que $f(a) = f(b)$ para alguns $a, b \in R^n$ distintos. Então,

(a) Se $\det J_f(0) = 1$ *então* $\langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \rangle = R$.

(b) Se $\det J_f = 1$ *então* $\langle a_1 - b_1, ..., a_n - b_n \rangle = R$

Demonstração.

É suficiente mostrar (a). Sem perda de generalidade podemos supor R dominio noetheriano e $f(0) = 0$. Nesse caso, seja g a inversa formal de f sobre R. Suponha que $I := \langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \rangle$ seja um ideal próprio e seja $\mathfrak{m}$ um ideal maximal sobre I. Considere $\tilde{R}$ o completamento $\mathfrak{m}$-ádico de R. Como $a_i, b_i \in \mathfrak{m}$ temos $f(a), f(b) \in \mathfrak{m}$ de modo que $g(f(a)), g(f(b))$ são elementos bem definidos em $\tilde{R}$.

Lema

Seja R um dominio e $f \in \mathcal{MP}_n(R)$. Suponha que $f(a) = f(b)$ para alguns $a, b \in R^n$ distintos. Então,

(a) Se $\det J_f(0) = 1$ *então* $\langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \rangle = R$.

(b) Se $\det J_f = 1$ *então* $\langle a_1 - b_1, ..., a_n - b_n \rangle = R$

Demonstração.

É suficiente mostrar (a). Sem perda de generalidade podemos supor R dominio noetheriano e $f(0) = 0$. Nesse caso, seja g a inversa formal de f sobre R. Suponha que $I := \langle a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n \rangle$ seja um ideal próprio e seja $\mathfrak{m}$ um ideal maximal sobre I. Considere $\tilde{R}$ o completamento $\mathfrak{m}$-ádico de R. Como $a_i, b_i \in \mathfrak{m}$ temos $f(a), f(b) \in \mathfrak{m}$ de modo que $g(f(a)), g(f(b))$ são elementos bem definidos em $\tilde{R}$. Como g é inversa fomal de f temos $a = g(f(a)) = g(f(b)) = b$. Contradição!.

□

Lema de Hensel

Seja $\mathcal{O}$ um anel de valoração discreta completo com corpo residuo k. Sejam $f_1, ..., f_n \in \mathcal{O}[X_1, ..., X_n]$ e $\alpha \in \mathcal{O}^n$ tais que

$$f_1(\alpha) \equiv \cdots \equiv f_n(\alpha) \equiv 0 \mod \mathcal{M}^{2m+1}$$

onde $m := ord_{\mathcal{M}}(\det J_f(\alpha)) < \infty$. Então existe único $a \in \mathcal{O}^n$ tal que $a \equiv \alpha \mod \mathcal{M}^{m+1}$ e $f_1(a) = \cdots = f_n(a) = 0$.

Lema de Hensel

Seja $\mathcal{O}$ um anel de valoração discreta completo com corpo residuo k. Sejam $f_1, ..., f_n \in \mathcal{O}[X_1, ..., X_n]$ e $\alpha \in \mathcal{O}^n$ tais que

$$f_1(\alpha) \equiv \cdots \equiv f_n(\alpha) \equiv 0 \mod \mathcal{M}^{2m+1}$$

onde $m := ord_{\mathcal{M}}(\det J_f(\alpha)) < \infty$. Então existe único $a \in \mathcal{O}^n$ tal que $a \equiv \alpha \mod \mathcal{M}^{m+1}$ e $f_1(a) = \cdots = f_n(a) = 0$.

Corolário

Nas condições acima, suponha que $f = (f_1, ..., f_n) \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é um mapa de Keller. Se R é uma $\mathcal{O}$-álgebra denote $X(R)$ o conjunto de R-pontos. Então existe uma bijeção

$$X(\mathcal{O}) \longrightarrow X(k) : \alpha \mapsto \overline{\alpha}$$

Teorema

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um anel de valoração discreta completo com k finito. Qualquer mapa ***fortemente invariante*** *$f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.*

Teorema

*Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um anel de valoração discreta completo com k finito. Qualquer mapa **fortemente invariante** $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.*

Corolário

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um AVD invariante com k finito. Então qualquer mapa de Keller unimodular $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.

Teorema

*Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um anel de valoração discreta completo com k finito. Qualquer mapa **fortemente invariante** $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.*

Corolário

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um AVD invariante com k finito. Então qualquer mapa de Keller unimodular $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.

Demonstração.

Suponha que tal não ocorra, digamos $f(a_1) = \cdots = f(a_m) = c \in \mathcal{O}^n$ para $m > 1$.

Teorema

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um anel de valoração discreta completo com k finito. Qualquer mapa ***fortemente invariante*** *$f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.*

Corolário

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um AVD invariante com k finito. Então qualquer mapa de Keller unimodular $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.

Demonstração.

Suponha que tal não ocorra, digamos $f(a_1) = \cdots = f(a_m) = c \in \mathcal{O}^n$ para $m > 1$. Como $f(a_1) = f(a_2)$ e $\det J_f = 1$ obtemos $\langle a_2 - a_1 \rangle = \mathcal{O}$.

Teorema

*Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um anel de valoração discreta completo com k finito. Qualquer mapa **fortemente invariante** $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.*

Corolário

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um AVD invariante com k finito. Então qualquer mapa de Keller unimodular $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.

Demonstração.

Suponha que tal não ocorra, digamos $f(a_1) = \cdots = f(a_m) = c \in \mathcal{O}^n$ para $m > 1$. Como $f(a_1) = f(a_2)$ e $\det J_f = 1$ obtemos $\langle a_2 - a_1 \rangle = \mathcal{O}$.Pela condição invariante sabemos que existe $b \in \mathcal{O}^n$ tal que $\langle f(b) - f(a_1) \rangle = \mathcal{O}$. Assim, $\langle a_2 - a_1 \rangle = \langle f(b) - f(a_1) \rangle$.

Teorema

*Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um anel de valoração discreta completo com k finito. Qualquer mapa **fortemente invariante** $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.*

Corolário

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um AVD invariante com k finito. Então qualquer mapa de Keller unimodular $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.

Demonstração.

Suponha que tal não ocorra, digamos $f(a_1) = \cdots = f(a_m) = c \in \mathcal{O}^n$ para $m > 1$. Como $f(a_1) = f(a_2)$ e $\det J_f = 1$ obtemos $\langle a_2 - a_1 \rangle = \mathcal{O}$.Pela condição invariante sabemos que existe $b \in \mathcal{O}^n$ tal que $\langle f(b) - f(a_1) \rangle = \mathcal{O}$. Assim, $\langle a_2 - a_1 \rangle = \langle f(b) - f(a_1) \rangle$.Daí, segue que existe um automorfismo afim Keller $h \in Aut_n(\mathcal{O})$ tal que $h(f(b)) = a_2$ e $h(f(a_1)) = a_1$.

Teorema

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um anel de valoração discreta completo com k finito. Qualquer mapa ***fortemente invariante*** *$f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.*

Corolário

Seja $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ um AVD invariante com k finito. Então qualquer mapa de Keller unimodular $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ é injetivo.

Demonstração.

Suponha que tal não ocorra, digamos $f(a_1) = \cdots = f(a_m) = c \in \mathcal{O}^n$ para $m > 1$. Como $f(a_1) = f(a_2)$ e $\det J_f = 1$ obtemos $\langle a_2 - a_1 \rangle = \mathcal{O}$.Pela condição invariante sabemos que existe $b \in \mathcal{O}^n$ tal que $\langle f(b) - f(a_1) \rangle = \mathcal{O}$. Assim, $\langle a_2 - a_1 \rangle = \langle f(b) - f(a_1) \rangle$.Daí, segue que existe um automorfismo afim Keller $h \in Aut_n(\mathcal{O})$ tal que $h(f(b)) = a_2$ e $h(f(a_1)) = a_1$. Defina $g := f \circ h \circ f$. Então, g é fortemente invariante e $g(b) = c$ e $g(a_1) = c$. Note que $b \neq a_j$ para todo j. Contradição pelo corolário do lema de Hensel.

$\square$

Lema

Sejam $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \overline{\mathbb{Q}}^m$. *Para uma infinidade de primos* $p \in \mathbb{Z}$ *existe um mergulho:*

$$\varphi : \mathbb{Z}[\alpha_1, ..., \alpha_m] \hookrightarrow \mathbb{Z}_p.$$

Lema

Sejam $(\alpha_1, ..., \alpha_m) \in \overline{\mathbb{Q}}^m$. *Para uma infinidade de primos* $p \in \mathbb{Z}$ *existe um mergulho:*

$$\varphi : \mathbb{Z}[\alpha_1, ..., \alpha_m] \hookrightarrow \mathbb{Z}_p.$$

Teorema

A Conjectura do Jacobiano (sobre $\mathbb{C}$*) é equivalente a seguinte afirmação:*

- *Para quase todo primo* $p \in \mathbb{Z}$ *o dominio* $\mathbb{Z}_p$ *é invariante.*

Demonstração.

A implicação relevante é $\Longleftarrow$.

Demonstração.

A implicação relevante é $\Longleftarrow$. Suponha que tal não ocorra. Pelo teorema de Connell-van der Dries existe $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z})$ um mapa de Keller que não é isomorfismo.

Demonstração.

A implicação relevante é $\Longleftarrow$. Suponha que tal não ocorra. Pelo teorema de Connell-van der Dries existe $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z})$ um mapa de Keller que não é isomorfismo. Em particular, $f \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ não é injetivo. Pelo lema da imersão $f \otimes \mathbb{Z}_p$ não é injetivo para uma infinidade de primos p.

Demonstração.

A implicação relevante é $\Longleftarrow$. Suponha que tal não ocorra. Pelo teorema de Connell-van der Dries existe $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z})$ um mapa de Keller que não é isomorfismo. Em particular, $f \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ não é injetivo. Pelo lema da imersão $f \otimes \mathbb{Z}_p$ não é injetivo para uma infinidade de primos p.Fixe um primo p tal que

- $f \otimes \mathbb{Z}_p$ não é injetivo.

Demonstração.

A implicação relevante é $\Longleftarrow$. Suponha que tal não ocorra. Pelo teorema de Connell-van der Dries existe $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z})$ um mapa de Keller que não é isomorfismo. Em particular, $f \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ não é injetivo. Pelo lema da imersão $f \otimes \mathbb{Z}_p$ não é injetivo para uma infinidade de primos p.Fixe um primo p tal que

- $f \otimes \mathbb{Z}_p$ não é injetivo.
- $\mathbb{Z}_p$ é invariante.

Demonstração.

A implicação relevante é $\Longleftarrow$. Suponha que tal não ocorra. Pelo teorema de Connell-van der Dries existe $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z})$ um mapa de Keller que não é isomorfismo. Em particular, $f \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ não é injetivo. Pelo lema da imersão $f \otimes \mathbb{Z}_p$ não é injetivo para uma infinidade de primos p.Fixe um primo p tal que

- $f \otimes \mathbb{Z}_p$ não é injetivo.
- $\mathbb{Z}_p$ é invariante.
- $f \otimes \mathbb{Z}_p$ é unimodular.

Demonstração.

A implicação relevante é $\Longleftarrow$. Suponha que tal não ocorra. Pelo teorema de Connell-van der Dries existe $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z})$ um mapa de Keller que não é isomorfismo. Em particular, $f \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ não é injetivo. Pelo lema da imersão $f \otimes \mathbb{Z}_p$ não é injetivo para uma infinidade de primos p.Fixe um primo p tal que

- $f \otimes \mathbb{Z}_p$ não é injetivo.
- $\mathbb{Z}_p$ é invariante.
- $f \otimes \mathbb{Z}_p$ é unimodular.

Assim, obtemos um mapa Keller unimodular e não injetivo sobre o dominio invariante $\mathbb{Z}_p$. Absurdo pelo corolário acima.

$\square$

Preliminares

No que se segue usaremos o seguinte resultado:

Teorema

Seja K um corpo local com corpo residuo k. Existe uma correspodencia 1-1:

$$\{\textit{extensões finitas não ramificadas de } K\} \longrightarrow \{\textit{extensões finitas de } k\}$$

$$L \mapsto l$$

onde l é o corpo residuo de L.

Teorema

*Suponha que $\mathbb{Z}_p$ seja um dominio invariante. Seja $K|\mathbb{Q}_p$ uma extensão finita e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}_p)$ um mapa **Keller unimodular**. Então $f \otimes \mathcal{O}_K$ é injetivo.*

Teorema

Suponha que $\mathbb{Z}_p$ seja um dominio invariante. Seja $K|\mathbb{Q}_p$ uma extensão finita e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}_p)$ um mapa ***Keller unimodular****. Então $f \otimes \mathcal{O}_K$ é injetivo.*

Lema

Seja $K|\mathbb{Q}_p$ uma extensão finita galoisiana e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O}_K)$ um mapa Keller unimodular não injetivo. Então existe $g \in \mathcal{MP}_{nm}(\mathbb{Z}_p)$ um mapa Keller unimodular não injetivo onde $m = [K : \mathbb{Q}_p]$.

Teorema

*Suponha que $\mathbb{Z}_p$ seja um dominio invariante. Seja $K|\mathbb{Q}_p$ uma extensão finita e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}_p)$ um mapa **Keller unimodular**. Então $f \otimes \mathcal{O}_K$ é injetivo.*

Lema

Seja $K|\mathbb{Q}_p$ uma extensão finita galoisiana e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O}_K)$ um mapa Keller unimodular não injetivo. Então existe $g \in \mathcal{MP}_{nm}(\mathbb{Z}_p)$ um mapa Keller unimodular não injetivo onde $m = [K : \mathbb{Q}_p]$.

Pela separabilidade de $K|\mathbb{Q}_p$ garantimos que $\mathcal{O}_K$ é um $\mathbb{Z}_p$-módulo livre de posto $[K : \mathbb{Q}]$. Seja $\{e_1, ..., e_n\}$ uma $\mathbb{Z}_p$-base e escreva $X_i = X_{1i}e_1 + \cdots + X_{mi}e_m$. Um mapa de Keller unimodular e não injetivo $g = (g_{11}, ..., g_{m1}, ..., g_{1n}, ..., g_{mn}) \in \mathcal{MP}_{nm}(\mathbb{Z}_p)$ é obtido pelas relações:

$$f_k(X_1, ..., X_n) = g_{1k}(\{X_{ij}\})e_1 + \cdots + g_{mk}(\{X_{ij}\})e_m.$$

Lema da imersão forte

Lema da imersão

Seja $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^n$. *Para quase todo primo* $p \in \mathbb{N}$ *existe uma extensão finita* $K|\mathbb{Q}_p$ *tal que se* $\mathcal{O}_{K,p}$ *denota o anel de inteiros de* K *então existe um mergulho*

$$\varphi_p : \mathbb{Z}[\alpha_1, ..., \alpha_n] \hookrightarrow \mathcal{O}_{K,p}.$$

Lema da imersão forte

Lema da imersão

Seja $\alpha = (\alpha_1, ...\alpha_n) \in \overline{\mathbb{Q}}^n$. Para quase todo primo $p \in \mathbb{N}$ existe uma extensão finita $K|\mathbb{Q}_p$ tal que se $\mathcal{O}_{K,p}$ denota o anel de inteiros de K então existe um mergulho

$$\varphi_p : \mathbb{Z}[\alpha_1, ..., \alpha_n] \hookrightarrow \mathcal{O}_{K,p}.$$

Usaremos o seguinte

Lema

Seja $f(T) \in \mathbb{Z}[T]$ um polinomio irredutível. Então para quase todo primo p existe $a \in \mathcal{O}_{K,p}$ tal que $f(a) = 0$.

Demonstração.

Para $n = 1$: Seja $m_{\alpha_1}(T) \in \mathbb{Q}[T]$ o polinomio minimo associado. Temos $m_{\alpha_1}(T) = c(m_{\alpha_1}(T))f(T)$ onde $f(T) \in \mathbb{Z}[T]$ é primitivo. Como $f(T)\mathbb{Q}[T] \cap \mathbb{Z}[T] = f(T)\mathbb{Z}[T]$ considerado o mapa de anéis

$$v_{\alpha_1} : \mathbb{Z}[T] \twoheadrightarrow \mathbb{Z}[\alpha_1]$$

temos que $Ker(v_{\alpha_1}) = \langle f(T) \rangle$. Assim, $\mathbb{Z}[T]/\langle f(T)\rangle \cong \mathbb{Z}[\alpha_1]$. Para quase todo primo $p \in \mathbb{Z}$ temos $f(a) = 0$ para algum $a \in \mathcal{O}_{K,p}$. Obtemos:

$$\mathbb{Z}[\alpha_1] \cong \mathbb{Z}[T]/\langle f(T)\rangle \hookrightarrow \mathbb{Q}[T]/\langle f(T)\rangle \hookrightarrow K : \alpha_1 \mapsto a$$

Caso geral: temos $R := \mathbb{Z}[\alpha_1, ..., \alpha_m] \subset \mathbb{Q}(\beta)$ para algum $\beta \in \overline{\mathbb{Q}}$. Seja $d \in \mathbb{Z}$ tal que $dR \subset \mathbb{Z}[\beta]$. Tome $S := \{d^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sistema multiplicativo e note que $R \hookrightarrow S^{-1}\mathbb{Z}[\beta]$. Para uma infinidade de primos p: $S^{-1}\mathbb{Z}[\beta] \subset \mathcal{O}_{K,p}$.

$\square$

Refinamento

Teorema

A conjectura do Jacobiano (sobre $\mathbb{C}$) é equivalente a seguinte afirmação:

- *Para uma infinidade de primos $p \in \mathbb{Z}$ o dominio $\mathbb{Z}_p$ é invariante.*

Refinamento

Teorema

A conjectura do Jacobiano (sobre $\mathbb{C}$) é equivalente a seguinte afirmação:

- *Para uma infinidade de primos $p \in \mathbb{Z}$ o dominio $\mathbb{Z}_p$ é invariante.*

Argumento:

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z})$ um contraexemplo para JC. Em particular, $f \otimes \overline{\mathbb{Q}} \in \mathcal{MP}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ não é injetivo. Assim, existem $\alpha \neq \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ tais que $f(\alpha) = f(\beta)$.

Refinamento

Teorema

A conjectura do Jacobiano (sobre $\mathbb{C}$) é equivalente a seguinte afirmação:

- *Para uma infinidade de primos $p \in \mathbb{Z}$ o dominio $\mathbb{Z}_p$ é invariante.*

Argumento:

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z})$ um contraexemplo para JC. Em particular, $f \otimes \overline{\mathbb{Q}} \in \mathcal{MP}_n(\overline{\mathbb{Q}})$ não é injetivo. Assim, existem $\alpha \neq \beta \in \overline{\mathbb{Q}}$ tais que $f(\alpha) = f(\beta)$. Pelo lema acima, para quase todo primo p existe uma extensão finita $K|\mathbb{Q}_p$ e um mergulho: $\mathbb{Z}[\alpha, \beta] \hookrightarrow \mathcal{O}_{K,p}$.

Fixe um primo $p \in \mathbb{Z}$ tal que:

Fixe um primo $p \in \mathbb{Z}$ tal que:

- $\mathbb{Z}[\alpha, \beta] \hookrightarrow \mathcal{O}_{K,p}$.

Fixe um primo $p \in \mathbb{Z}$ tal que:

- $\mathbb{Z}[\alpha, \beta] \hookrightarrow \mathcal{O}_{K,p}$.
- $\mathbb{Z}_p$ é invariante.

Fixe um primo $p \in \mathbb{Z}$ tal que:

- $\mathbb{Z}[\alpha, \beta] \hookrightarrow \mathcal{O}_{K,p}$.
- $\mathbb{Z}_p$ é invariante.
- $f \otimes \mathbb{Z}_p \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}_p)$ é unimodular.

Fixe um primo $p \in \mathbb{Z}$ tal que:

- $\mathbb{Z}[\alpha, \beta] \hookrightarrow \mathcal{O}_{K,p}$.
- $\mathbb{Z}_p$ é invariante.
- $f \otimes \mathbb{Z}_p \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}_p)$ é unimodular.

Pelo lema acima existe $g \in \mathcal{MP}_M(\mathbb{Z}_p)$ mapa Keller unimodular e não injetivo. Contradição!!

Corolário

Existe um conjunto finito de primos E tal que para qualquer primo $p \in \mathbb{Z} \setminus E$ temos

$$\mathbb{Z}_p \text{ é invariante} \Longleftrightarrow \mathbb{Z}_p \text{ é unimodular}$$

Corolário

Existe um conjunto finito de primos E tal que para qualquer primo $p \in \mathbb{Z} \setminus E$ temos

$$\mathbb{Z}_p \text{ é invariante} \Longleftrightarrow \mathbb{Z}_p \text{ é unimodular}$$

Demonstração.

A implicação $\Longleftarrow$ é verdadeira em qualquer caso. Para mostrar $\Longrightarrow$ suponha que tal não ocorra. Então para uma infinidade de primos temos $\mathbb{Z}_p$ invariante e não-unimodular. Pelo teorema de Essen-Lipton segue que a conjectura do Jacobiano (sobre $\mathbb{C}$) é falsa. Por outro lado, o teorema acima garante que a conjectura do Jacobiano é verdadeira. Contradição!!.

$\square$

Alguns resultados

Teorema

Qualquer dominio local $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *com* $q := \#k < \infty$ *é* $(q-1)$*-unimodular.*

Alguns resultados

Teorema

Qualquer dominio local $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *com* $q := \#k < \infty$ *é* $(q-1)$*-unimodular.*

Demonstração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ um mapa de Keller de grau $\leq q-1$ e considere o conjunto algébrico afim X em $\mathbb{A}_k^n$ descrito pelas equações $\overline{f}_1 = \cdots = \overline{f_n} = 0$.

Alguns resultados

Teorema

Qualquer dominio local $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *com* $q := \#k < \infty$ *é* $(q-1)$*-unimodular.*

Demonstração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ um mapa de Keller de grau $\leq q-1$ e considere o conjunto algébrico afim X em $\mathbb{A}^n_{\overline{k}}$ descrito pelas equações $\overline{f}_1 = \cdots = \overline{f_n} = 0$.Afirmamos que $\dim X = 0$. De fato, $X = \overline{f}^{-1}(0)$, onde $\overline{f}$ é o mapa induzido em $\overline{k}^n$.

Alguns resultados

Teorema

Qualquer dominio local $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *com* $q := \#k < \infty$ *é* $(q-1)$*-unimodular.*

Demonstração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ um mapa de Keller de grau $\leq q-1$ e considere o conjunto algébrico afim X em $\mathbb{A}^n_{\overline{k}}$ descrito pelas equações $\overline{f}_1 = \cdots = \overline{f_n} = 0$.Afirmamos que $\dim X = 0$. De fato, $X = \overline{f}^{-1}(0)$, onde $\overline{f}$ é o mapa induzido em $\overline{k}^n$. Pelo [1, Theorem 1.1.32] temos $\#X \leq [\overline{k}(X_1, ..., X_n) : \overline{k}(\overline{f}_1, ..., \overline{f}_n)] < \infty$.

Alguns resultados

Teorema

Qualquer dominio local $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *com* $q := \#k < \infty$ *é* $(q-1)$*-unimodular.*

Demonstração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ um mapa de Keller de grau $\leq q-1$ e considere o conjunto algébrico afim X em $\mathbb{A}^n_k$ descrito pelas equações $\overline{f}_1 = \cdots = \overline{f_n} = 0$.Afirmamos que $\dim X = 0$. De fato, $X = \overline{f}^{-1}(0)$, onde $\overline{f}$ é o mapa induzido em $\overline{k}^n$. Pelo [1, Theorem 1.1.32] temos $\#X \leq [\overline{k}(X_1, ..., X_n) : \overline{k}(\overline{f}_1, ..., \overline{f}_n)] < \infty$.Pela desigualdade de Bézout obtemos

$$\#X(k) \leq \#X(\overline{k}) \leq \prod_i deg(\overline{f_i}) < q^n.$$

Alguns resultados

Teorema

Qualquer dominio local $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ *com* $q := \#k < \infty$ *é* $(q-1)$*-unimodular.*

Demonstração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O})$ um mapa de Keller de grau $\leq q-1$ e considere o conjunto algébrico afim X em $\mathbb{A}^n_k$ descrito pelas equações $\overline{f}_1 = \cdots = \overline{f_n} = 0$.Afirmamos que $\dim X = 0$. De fato, $X = \overline{f}^{-1}(0)$, onde $\overline{f}$ é o mapa induzido em $\overline{k}^n$. Pelo [1, Theorem 1.1.32] temos $\#X \leq [\overline{k}(X_1, ..., X_n) : \overline{k}(\overline{f}_1, ..., \overline{f}_n)] < \infty$.Pela desigualdade de Bézout obtemos

$$\#X(k) \leq \#X(\overline{k}) \leq \prod_i deg(\overline{f_i}) < q^n.$$

Logo, f é unimodular.

$\square$

Algumas consequências

Observação

Para $char(\mathcal{O}) = p > 0$ *esse é o melhor resultado. De fato, considere* $\mathcal{O} = \mathbb{F}_q[[T]]$ *e*

$$f = (X_1 - X_1^q, ..., X_n - X_n^q) \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{F}_q[[T]]).$$

Então, f *é um mapa não unimodular e* $deg(f) = q$.

Algumas consequências

Observação

Para $char(\mathcal{O}) = p > 0$ *esse é o melhor resultado. De fato, considere* $\mathcal{O} = \mathbb{F}_q[[T]]$ *e*

$$f = (X_1 - X_1^q, ..., X_n - X_n^q) \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{F}_q[[T]]).$$

Então, f *é um mapa não unimodular e* $deg(f) = q$*.*

Corolário

$\mathbb{F}_p[[T]]$ *e* $\mathbb{Z}_p$ *são dominios* $(p-1)$ *unimodulares.*

Algumas consequências

Observação

Para $char(\mathcal{O}) = p > 0$ *esse é o melhor resultado. De fato, considere* $\mathcal{O} = \mathbb{F}_q[[T]]$ *e*

$$f = (X_1 - X_1^q, ..., X_n - X_n^q) \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{F}_q[[T]]).$$

Então, f *é um mapa não unimodular e* $deg(f) = q$*.*

Corolário

$\mathbb{F}_p[[T]]$ *e* $\mathbb{Z}_p$ *são dominios* $(p-1)$ *unimodulares.*

Corolário

Para qualquer primo $p > 3$ *o dominio* $\mathbb{Z}_p$ *é* 3*-unimodular.*

Dimensão 2

No caso AVD e dimensão 2 o teorema anterior pode ser refinado.

Dimensão 2

No caso AVD e dimensão 2 o teorema anterior pode ser refinado.

Teorema

Seja $f \in \mathcal{MP}_2(\mathcal{O})$ um mapa de Keller sobre um anel de valoração discreta completo $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ com $char(\mathcal{O}) = 0$ e $q := \#k < \infty$. Se $deg(f_1) < q^2$ então f é unimodular.

Dimensão 2

No caso AVD e dimensão 2 o teorema anterior pode ser refinado.

Teorema

Seja $f \in \mathcal{MP}_2(\mathcal{O})$ um mapa de Keller sobre um anel de valoração discreta completo $(\mathcal{O}, \mathcal{M}, k)$ com $char(\mathcal{O}) = 0$ e $q := \#k < \infty$. Se $deg(f_1) < q^2$ então f é unimodular.

Usaremos o resultado principal da tese de Yitang Zhang:

Teorema(Yitang Zhang)

Seja $f \in \mathcal{MP}_2(K)$ um mapa de Keller sobre K, um corpo algebricamente fechado com $char(K) = 0$. Então

$$[K(X,Y) : K(f_1, f_2)] \leq \boldsymbol{Min}\{deg(f_1), deg(f_2)\}.$$

Demonstração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_2(\mathcal{O})$ mapa Keller com $deg(f_1) < q^2$ e denote $K := Frac(\mathcal{O})$.

Demonstração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_2(\mathcal{O})$ mapa Keller com $deg(f_1) < q^2$ e denote $K := Frac(\mathcal{O})$.

Pelo lema de Hensel é suficiente mostrar que $\#X(\mathcal{O}) < q^2$ onde $X(\mathcal{O})$ denota o conjunto de $\mathcal{O}$-pontos de $f_1 = f_2 = 0$. Agora,

$$\#X(\mathcal{O}) = f^{-1}(0) \leq (f \otimes \overline{K})^{-1}(0) \leq [\overline{K}(X, Y) : \overline{K}(f_1, f_2)].$$

onde última desigualdade é [1, Theorem 1.1.32].

Demonstração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_2(\mathcal{O})$ mapa Keller com $deg(f_1) < q^2$ e denote $K := Frac(\mathcal{O})$.

Pelo lema de Hensel é suficiente mostrar que $\#X(\mathcal{O}) < q^2$ onde $X(\mathcal{O})$ denota o conjunto de $\mathcal{O}$-pontos de $f_1 = f_2 = 0$. Agora,

$$\#X(\mathcal{O}) = f^{-1}(0) \leq (f \otimes \overline{K})^{-1}(0) \leq [\overline{K}(X,Y) : \overline{K}(f_1, f_2)].$$

onde última desigualdade é [1, Theorem 1.1.32]. Usando o resultado de Zhang e a condição $deg(f_1) < q^2$, obtemos

$$\#X(\mathcal{O}) \leq [\overline{K}(X,Y) : \overline{K}(f_1, f_2)] < q^2.$$

Demonstração.

Seja $f \in \mathcal{MP}_2(\mathcal{O})$ mapa Keller com $deg(f_1) < q^2$ e denote $K := Frac(\mathcal{O})$.

Pelo lema de Hensel é suficiente mostrar que $\#X(\mathcal{O}) < q^2$ onde $X(\mathcal{O})$ denota o conjunto de $\mathcal{O}$-pontos de $f_1 = f_2 = 0$. Agora,

$$\#X(\mathcal{O}) = f^{-1}(0) \leq (f \otimes \overline{K})^{-1}(0) \leq [\overline{K}(X, Y) : \overline{K}(f_1, f_2)].$$

onde última desigualdade é [1, Theorem 1.1.32]. Usando o resultado de Zhang e a condição $deg(f_1) < q^2$, obtemos

$$\#X(\mathcal{O}) \leq [\overline{K}(X, Y) : \overline{K}(f_1, f_2)] < q^2.$$

Logo, f é unimodular.

$\square$

Observação

$char(\mathcal{O}) = 0$ é relevante. Para ver isso, considere o exemplo canônico:

$$f = (X_1 - X_1^p, X_2 - X_2^p) \in \mathcal{MP}_2(\mathbb{F}_p[[T]])$$

Temos $deg(f_1) = p < p^2$ mas f não é unimodular.

Teorema

Seja $d \in \mathbb{Z}$. Então existe uma extensão finita $K|\mathbb{Q}_p$ tal que $\mathcal{O}_{K,p}$ é d-unimodular.

Teorema

Seja $d \in \mathbb{Z}$. Então existe uma extensão finita $K|\mathbb{Q}_p$ tal que $\mathcal{O}_{K,p}$ é d-unimodular.

Demonstração.

Seja $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p^m > d$ e considere o corpo $\mathbb{F}_{p^m}$.

Teorema

Seja $d \in \mathbb{Z}$. Então existe uma extensão finita $K|\mathbb{Q}_p$ tal que $\mathcal{O}_{K,p}$ é d-unimodular.

Demonstração.

Seja $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p^m > d$ e considere o corpo $\mathbb{F}_{p^m}$. Seja $K/\mathbb{Q}_p$ a extensão finita associada. Dado qualquer mapa de Keller $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O}_K)$ de grau $\leq d$ denote $X \subset \mathbb{A}^n_{\overline{\mathbb{F}_p}}$ o conjunto algébrico descrito por $\overline{f}_1, ...\overline{f}_n$.

Teorema

Seja $d \in \mathbb{Z}$. Então existe uma extensão finita $K|\mathbb{Q}_p$ tal que $\mathcal{O}_{K,p}$ é d-unimodular.

Demonstração.

Seja $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p^m > d$ e considere o corpo $\mathbb{F}_{p^m}$. Seja $K/\mathbb{Q}_p$ a extensão finita associada. Dado qualquer mapa de Keller $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O}_K)$ de grau $\leq d$ denote $X \subset \mathbb{A}^n_{\overline{\mathbb{F}_p}}$ o conjunto algébrico descrito por $\overline{f}_1, ...\overline{f}_n$. Condição de Keller implica que $\#X < \infty$ e além disso,

$$\#X \leq \prod deg(f_i) \leq d^n < (p^m)^n.$$

Teorema

Seja $d \in \mathbb{Z}$. Então existe uma extensão finita $K|\mathbb{Q}_p$ tal que $\mathcal{O}_{K,p}$ é d-unimodular.

Demonstração.

Seja $m \in \mathbb{Z}$ tal que $p^m > d$ e considere o corpo $\mathbb{F}_{p^m}$. Seja $K/\mathbb{Q}_p$ a extensão finita associada. Dado qualquer mapa de Keller $f \in \mathcal{MP}_n(\mathcal{O}_K)$ de grau $\leq d$ denote $X \subset \mathbb{A}^n_{\overline{\mathbb{F}_p}}$ o conjunto algébrico descrito por $\overline{f}_1, ...\overline{f}_n$. Condição de Keller implica que $\#X < \infty$ e além disso,

$$\#X \leq \prod deg(f_i) \leq d^n < (p^m)^n.$$

Assim, $\exists \alpha \in \mathbb{F}^n_{p^m} \setminus X$. Em particular, $\mathcal{O}_K$ é d-unimodular. $\square$

Dado $f \in \mathcal{MP}_n(R)$ defina $d(f) :=$ número de monomios de grau > 3 que ocorrem em f.

Proposição

Seja $p \in \mathbb{Z}_{>3}$ um primo e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}_p)$ um mapa de Keller. Suponha que

$$d(f) < log(2)^{-1} log(nlog(p/3)/log(3)).$$

Então f é unimodular.

Dado $f \in \mathcal{MP}_n(R)$ defina $d(f) :=$ número de monomios de grau > 3 que ocorrem em f.

Proposição

Seja $p \in \mathbb{Z}_{>3}$ um primo e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}_p)$ um mapa de Keller. Suponha que

$$d(f) < log(2)^{-1} log(nlog(p/3)/log(3)).$$

Então f é unimodular.

Demonstração.

Dado f podemos encontrar isomorfismos $G, H \in \mathcal{MP}_{m+n}(R)$, com $m = 2^{d(f)}$ tais que

Dado $f \in \mathcal{MP}_n(R)$ defina $d(f) :=$ número de monomios de grau > 3 que ocorrem em f.

Proposição

Seja $p \in \mathbb{Z}_{>3}$ um primo e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}_p)$ um mapa de Keller. Suponha que

$$d(f) < log(2)^{-1} log(nlog(p/3)/log(3)).$$

Então f é unimodular.

Demonstração.

Dado f podemos encontrar isomorfismos $G, H \in \mathcal{MP}_{m+n}(R)$, com $m = 2^{d(f)}$ tais que

- $H(0) = G(0) = 0$ e $deg(g) \leq 3$ onde $g := G \circ f^{[m]} \circ H$.

Dado $f \in \mathcal{MP}_n(R)$ defina $d(f) :=$ número de monomios de grau > 3 que ocorrem em f.

Proposição

Seja $p \in \mathbb{Z}_{>3}$ um primo e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}_p)$ um mapa de Keller. Suponha que

$$d(f) < log(2)^{-1} log(nlog(p/3)/log(3)).$$

Então f é unimodular.

Demonstração.

Dado f podemos encontrar isomorfismos $G, H \in \mathcal{MP}_{m+n}(R)$, com $m = 2^{d(f)}$ tais que

- $H(0) = G(0) = 0$ e $deg(g) \leq 3$ onde $g := G \circ f^{[m]} \circ H$.

Agora, considerando o conjunto de $\mathbb{Z}_p$-pontos associados à g e f temos

$$\#X_f(\mathbb{Z}_p) = \#X_{f^{[m]}}(\mathbb{Z}_p) = \#X_g(\mathbb{Z}_p) \leq 3^{m+n}.$$

Dado $f \in \mathcal{MP}_n(R)$ defina $d(f) :=$ número de monomios de grau > 3 que ocorrem em f.

Proposição

Seja $p \in \mathbb{Z}_{>3}$ um primo e $f \in \mathcal{MP}_n(\mathbb{Z}_p)$ um mapa de Keller. Suponha que

$$d(f) < log(2)^{-1} log(nlog(p/3)/log(3)).$$

Então f é unimodular.

Demonstração.

Dado f podemos encontrar isomorfismos $G, H \in \mathcal{MP}_{m+n}(R)$, com $m = 2^{d(f)}$ tais que

- $H(0) = G(0) = 0$ e $deg(g) \leq 3$ onde $g := G \circ f^{[m]} \circ H$.

Agora, considerando o conjunto de $\mathbb{Z}_p$-pontos associados à g e f temos

$$\#X_f(\mathbb{Z}_p) = \#X_{f^{[m]}}(\mathbb{Z}_p) = \#X_g(\mathbb{Z}_p) \leq 3^{m+n}.$$

A condição em $d(f)$ implica que $3^{m+n} < p^n$. Assim, $\#X_f(\mathbb{Z}_p) < p^n$. $\square$

Alguns problemas

- Existe um teorema de redução de grau para conjectura unimodular?

Alguns problemas

- Existe um teorema de redução de grau para conjectura unimodular?
- Encontrar um primo p tal que $\mathbb{Z}_p$ é unimodular.

Alguns problemas

- Existe um teorema de redução de grau para conjectura unimodular?
- Encontrar um primo p tal que $\mathbb{Z}_p$ é unimodular.
- Dado um primo p encontrar uma extensão finita $K|\mathbb{Q}_p$ tal que $\mathcal{O}_K$ é unimodular.

Alguns problemas

- Existe um teorema de redução de grau para conjectura unimodular?
- Encontrar um primo p tal que $\mathbb{Z}_p$ é unimodular.
- Dado um primo p encontrar uma extensão finita $K|\mathbb{Q}_p$ tal que $\mathcal{O}_K$ é unimodular.
- No teorema invariância$\cong$unimodularidade, o que podemos dizer sobre $\#E$?

Alguns problemas

- Existe um teorema de redução de grau para conjectura unimodular?
- Encontrar um primo p tal que $\mathbb{Z}_p$ é unimodular.
- Dado um primo p encontrar uma extensão finita $K|\mathbb{Q}_p$ tal que $\mathcal{O}_K$ é unimodular.
- No teorema invariância$\cong$unimodularidade, o que podemos dizer sobre $\#E$?
- Seja $f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ um mapa de Keller e suponha que $f \otimes \mathcal{O}$ é injetivo, onde $\mathcal{O}$ é o fecho inteiro de $\mathbb{Z}$ em $\overline{\mathbb{Q}}$. f é isomorfismo?

Observação

Na direção da última questão temos:

Teorema

Seja $f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ um mapa de Keller e suponha que $f \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ é injetivo. Então f é isomorfismo.

Observação

Na direção da última questão temos:

Teorema

Seja $f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ um mapa de Keller e suponha que $f \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ é injetivo. Então f é isomorfismo.

Prova: Aplique o teorema de Cynk-Rusek.

Observação

Na direção da última questão temos:

Teorema

Seja $f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ um mapa de Keller e suponha que $f \otimes \overline{\mathbb{Q}}$ é injetivo. Então f é isomorfismo.

Prova: Aplique o teorema de Cynk-Rusek.Por outro lado:

Teorema

O último problema da lista acima é equivalente a Conjectura do Jacobiano sobre $\mathbb{C}$.

Mais precisamente, suponha que qualquer mapa de Keller $f : \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}^n$ é tal $f \otimes \mathcal{O}$ é injetivo, onde $\mathcal{O}$ é o fecho inteiro de $\mathbb{Z}$ em $\overline{\mathbb{Q}}$. Então JC (sobre $\mathbb{C}$) é verdadeira.

Referências

- Arno van den Essen (2000). Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture (Vol. 190). Springer Science & Business Media.
- Bass, H., Connell, E. H., Wright, D. (1982). The Jacobian conjecture: reduction of degree and formal expansion of the inverse. Bulletin of the American Mathematical Society, 7(2), 287-330.
- Arno van den Essen and Richard J. Lipton. A p-adic approach to the Jacobian Conjecture. Journal of Pure and Applied Algebra 219.7 (2015): 2624-2628.
- Hartshorne, R. (1977). Algebraic Geometry; Graduate Texts in Mathematics..
- Greenberg, M. J. (1969). Lectures on forms in many variables (Vol. 31).

Obrigado!!!