EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM VARIEDADES ALGÉBRICAS

WODSON MENDSON

Resumo. O presente texto é de caráter puramente expositório. Iniciando do básico (equações diferencias sobre $\mathbb{R}/\mathbb{C}$) visamos definir a categoria das equações diferenciais em variedades algébricas e estudar aspectos aritméticos e geométricos relacionados.

Sumário

Parte 1. Teoria clássica das equações diferenciais ordinárias

1. Teorema fundamental das EDO's

1.1. **EDOS's e suas soluções.** Seja $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto conexo. Uma equação diferencial de **primeira ordem** em n-variáveis em U é uma equação do tipo $x' = f(t,x)$ onde $f(t,x)$ é uma função contínua em U. Uma solução de uma tal equação é uma função $x : (t_1, t_2) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 tal que para todo $t \in [t_1, t_2]$ temos

- $(t, x(t)) \in U$;

[1]O autor agradece Jorge Vitório Pereira pela leitura e correções feitas no texto

- $x^{'}(t) = f(t, x(t))$.

1.2. **Enunciado do Teorema de existência e unicidade.** Na presente seção, mostraremos o seguinte resultado.

Teorema 1.1. *Sejam $f \in C^0(U, \mathbb{R}^n)$ e $(t_0, x_0) \in U$. Se f é localmente Lipchitz com respeito ao segundo argumento e uniformemente com respeito ao primeiro então existe única solução local $\overline{x}(t) \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ definida em algum intervalo I em torno de t_0.*

Exemplo. *A condição Lipschitz é relevante para garantir a unicidade. Para ver isso, considere a equação $x^{'} = x^{1/3}$. Temos que $x_1(t) := 0$ para $t \in \mathbb{R}$ e $x_2(t) := (2/3t)^{3/2}$ para $t \geq 0$ são duas soluções passando por 0.*

1.3. **O princípio de contração.** A principal ferramenta que usaremos na demonstração do Teorema 1.1 acima é o seguinte resultado.

Teorema 1.2 (Princípio da contração)**.** *Seja V um $\mathbb{R}$-espaço Banach e $X \subset V$ um conjunto fechado. Seja $f : X \longrightarrow X$ uma α-**contração**. Então existe único $x \in X$ tal que $f(q) = q$ e*

$$|f^n(p) - q| \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha}|f(p) - p|.$$

Demonstração. Seja s outro ponto fixo satisfazendo as condições acima. Então, $|s - q| = |f(s) - f(q)| \leq \alpha|s - q|$. Logo, $s = q$. Assim, se existir ponto fixo então é único.
Mostremos a existência. Fixe $x_0 \in X$ e considere a sequência de iteradas $x_n := f^n(x_0)$. Temos que

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \alpha|x_n - x_{n-1}| \leq \cdots \leq \alpha^n|x_1 - x_0|.$$

Assim, para $m > n$ temos que

$$|x_m - x_n| = |\sum_{j=m+1}^{n}(x_{j+1} - x_j)| \leq \sum_{j=m+1}^{n}|x_{j+1} - x_j| \leq$$
$$\leq \sum_{j=m+1}^{n}\alpha^j|x_1 - x_0| = \alpha^n\sum_{j=1}^{m-1-n}\alpha^j|x_1 - x_0|.$$

Como $\sum_{j=1}^{m-n-1}\alpha^j|x_1 - x_0| = 1 - \alpha^{m-n}/1 - \alpha$ segue que

$$|x_m - x_n| \leq \alpha^n(1 - \alpha^{m-n}/1 - \alpha)|x_1 - x_0| \leq \frac{\alpha}{1-\alpha}|x_1 - x_0|.$$

Em particular, segue que a sequencia $\{x_n\}$ é Cauchy. Assim, existe $x := \lim x_n$. Note que $x \in X$, já que X é fechado. Temos ainda, $|f(x) - x| = |f(\lim x_n) - \lim x_n| = \lim_{|} x_{n+1} - x_n| = 0$. Logo, $f(x) = x$. ■

Observação. *Seja I um intervalo compacto em $\mathbb{R}$ e $X := C^0(I; \mathbb{R}^n)$. Usando a estrutura de $\mathbb{R}$-espaço em $\mathbb{R}^n$ podemos equipar X com uma estrutura $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Além disso, X admite estrutura normada dada pela seguinte fórmula: dado $f \in X$, defina $|f| := sup_{t \in I}\{|f(t)|\}$. Temos que X é um espaço de Banach.*

1.4. **Prova do Teorema 1.1.** Seja $T > 0$ e considere $X_T := C([-T,T],\mathbb{R}^n)$. Pela observação acima, X é um espaço de Banach. Seja $\delta > 0$ e considere a bola $B_\delta(x_0) \subset \mathbb{R}^n$. Vamos procurar um operador $\Phi : X \longrightarrow X$ e um fechado $F \subset X$ tal que $\Psi|_F : F \longrightarrow F$ seja uma contração e o ponto fixo de F se correponda a uma (única) solução local do sistema diferencial associado $x^{'}(t) = f(x,t)$ em torno de (t_0, x_0). Para simplificar notação, suporemos que $t_0 = 0$. Considere o compacto $V_T := [-T,T] \times \overline{B_\delta(x_0)}$ e seja $F_\delta := \{x \in X \mid |x - x_0| \leq \delta\}$, onde encaramos x_0 como a função constante. Sejam $M := sup_{(t,x)\in V_T}\{|f(t,x)|\}$ e $T_0 := Min\{T, \delta/2M\}$.

Defina o operador $\Phi : X_{T_0} \longrightarrow X_{T_0}$ que associa $x \in X_{T_0}$ à função

$$\Phi(x)(t) := x_0 + \int_{-t}^{t} f(s,x)ds.$$

Afirmação: Φ se restringe a uma contração: $\Phi|_{F_0} : F_0 \longrightarrow F_0$. De fato, temos

$$|\Phi(x)(t) - x_0| = \Big|\int_{-t}^{t} f(s,x)ds\Big| \leq 2T_0M \leq \delta.$$

Daí, $\Phi(F_0) \subset F_0$.

Φ é uma contração: para ver isso, note que $|\Phi(x)(t) - \Phi(y)(t)| = |\int_{-t}^{t}(f(s,x) - f(s,y))ds| \leq 2T_0C|x(s) - y(s)|$, já que $f(s,x)$ é localmente Lipchitz com respeito ao segundo argumento. Assim, escolhendo $T_0 < (2C)^{-1}$ obtemos a condição de contração. Aplicando o teorema do ponto fixo, segue que existe única aplicação $x \in F_0$ tal que $\Phi(x) = x$. Isso, por sua vez se corresponde a única solução $x : [-T_0, T_0] \longrightarrow B_\delta(x_0)$ que tal que $x^{'}(t) = f(t,x)$.

1.5. **Versão holomorfa.** Um argumento análogo pode ser aplicado para mostrar o caso holomorfo:

Proposição 1. *Sejam* $U := \{(z,w) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \mid |z - z_0| < \varepsilon \quad e \quad |w - w_0| < \delta\}$ *e* $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ *função analítica e limitada. Então, o problema de valor inicial* $w^{'} = f(z,w)$, $w(z_0) = w_0$ *possui única solução analítica definida no disco* $D_{\delta_0}(z_0)$, *onde* $\delta_0 := inf\{\varepsilon, \delta/M\}$ *com* $M := sup_{(z,w)\in\overline{U}}|f(z,w)|$.

2. Sistema linear diferencial homogêneo sobre $\mathbb{R}$

Consideremos agora um sistema diferencial do tipo $X^{'}(t) = A(t)X(t)$, onde $A(t)$ é uma matriz de funções contínuas em um intervalo limitado $I := (t_1, t_2)$. Chamaremos um tal sistema de **sistema linear diferencial homogêneo real.**
Pelo teorema fundamental, fixado $t_0 \in I$ existe única solução $\alpha(t)$ definida em todo o aberto I.

Definição 1. O conjunto de soluções fundamentais em I do sistema homogêneo $X^{'}(t) = A(t)X(t)$ é

$$\mathcal{S}(I) := \{\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid \ \alpha \text{ é uma solução do sistema}\}.$$

Proposição 2.1. *Sejam* $t_0 \in I$ *e* $\alpha_1, \cdots, \alpha_m \in S(I)$. *Então,* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ *são linearmente independentes sobre I se e somente se* $\alpha_1(t_0), \cdots, \alpha_m(t_0)$ *são linearmente independentes.*

Demonstração. Uma relação do tipo $\sum_j c_j\alpha_j = 0$ em I implica, em particular, uma relação do tipo $\sum_j c_j\alpha_j(t_0) = 0$. Agora, suponha que $\sum_j c_j\alpha_j(t_0) = 0$ para algumas constantes c_j nem todas nulas. Pelo teorema de unicidade, sabemos que existe única solução em I passando por $\alpha(t_0) := \sum_j c_j\alpha_j(t_0)$. Como 0 é uma solução e $\alpha(t) := \sum_j c_j\alpha_j$ satisfaz a equação diferencial segue que $\alpha(t) = 0$ em I. ■

Teorema 2.2. *$\mathcal{S}(I)$ é um $\mathbb{R}$-módulo de dimensão n.*

Demonstração. Pela proposição acima, $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{S}(I) \leq n$. Agora, aplique o teorema de existência em I para as condições iniciais $X_i(t_0) = e_i$, onde e_i é o i-vetor canônico. ■

Seja $\mathbf{Ab}(\mathbb{R})$ a categoria cujos objetos consistem de abertos de $\mathbb{R}$ com mapas definidos por inclusões. Considere o sistema homogêneo $D_A : X^{'}(t) = A(t)X(t)$ onde A uma matriz de funções contínuas em $\mathbb{R}$. Defina o funtor $\mathcal{S}_A : \mathbf{Ab}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{R}}$ que a cada aberto U associa

$$\mathcal{S}_A(U) := \{\alpha : U \longrightarrow \mathbb{R}^n \mid \alpha \text{ é uma solução do sistema } D_A\}.$$

Proposição 2.3. *$\mathcal{S}_A$ é um feixe localmente constante de $\mathbb{R}$-espaços vetoriais de dimensão n.*

Demonstração. Pela definição, devemos mostrar que para todo ponto $t \in \mathbb{R}$ existe um aberto U em torno de t tal que $\mathcal{S}_A|_U \cong \mathbb{R}^n$. Mas, isso se segue da teorema anterior. ■

3. Sistema linear holomorfo homogêneo

Muitos resultados como no caso $\mathbb{R}$ se estendem para sistemas homogêneos sobre $\mathbb{C}$, com algumas sutilezas com respeito a extensão de soluções.

Um sistema sistema holomorfo homogêneo definido em $U \subset \mathbb{C}$ consiste em uma equação do tipo

$$X^{'}(z) = A(z)X(z)$$

onde $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$. Uma solução do sistema em um aberto $V \subset U$ consiste em uma função $X(z) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ que satisfaz a equação acima. Para simplificar notação denotaremos o sistema diferencial acima no aberto U por $D_A(U)$.

Lema 3.1. *Sejam U um aberto conexo e $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$. Dado $z_0 \in U$ seja $D(z_0, \delta)$ a maior bola contida em U cetrada em z_0. Então, dado $x_0 \in \mathbb{C}^n$ existe única função holomorfa $x(z) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(D(z_0; \delta))^n$ tal que $x(z)^{'} = A(z)x(z)$ e $x(z_0) = x_0$.*

Demonstração. **Unicidade:** Seja $x(z)$ uma tal solução. Expandindo em série de potência, em torno de z_0 temos que $x(z)^{'} = \sum_n x_n(z - z_0)^n$ para $z \in D(z_0, \delta)$ e expandindo a função $A(z)$ em torno de z_0 temos $A(z) = \sum_m A_m(z - z_0)^m$ em $D(z_0, \delta)$. Substitundo na equação e comparando coeficientes, obtemos uma identidade do tipo

$$(n + 1)x_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} A_{n-i}x_i$$

e assim, os coeficientes de $x(z)$ unicamente determinados por x_0. Isso demonstra a unicidade.

Existência: Defina $x(z) := \sum_{n\geq 0} a_n(z - z_0)^n \in \mathbb{C}[[z - z_0]]^n$, onde os coeficientes a_n são definidos indutivamente como acima i.e. $(n + 1)a_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} A_{n-i}a_i$, onde $a_0 := x_0$. Vamos mostrar que essa série formal é de fato analítica na região $D(z_0, \delta)$.

Como $\sum_i A_i(z-z_0)^i$ é convergente, segue que $\lim A_i = 0$ e dai, dado $\varepsilon > 1/\delta$ existe n_0 tal que $n > n_0$ implica $|A_n| < \varepsilon$. Escolha $c > 0$ tal que $c\varepsilon^n > |A_n|$ para todo $n \geq 0$. Assim, obtemos $(n+1)|a_{n+1}| \leq \sum_{i=0}^n |A_{n-i}||a_i| \leq c\sum_i \varepsilon^{n-i}|a_i|$. Defina uma sequencia $\{c_n\}$ pondo

(i) $c_0 := |x_0|$;
(ii) $(n+1)c_{n+1} = c\sum_{j=0}^n \varepsilon^{n-j}c_j$.

Note que $2|a_1| \leq |a_0|c\varepsilon = c_0c\varepsilon = 2c_1 \implies |a_1| \leq c_1$ e por recorrencia segue que $|a_i| \leq c_i$ para todo i. Seja $g(z) := \sum_j c_jz^j \in \mathbb{C}[[z]]$.

A série converge para $|z| < 1/\varepsilon$. De fato, da fórmula $(n+1)c_n = c\sum_{k=0}^n \varepsilon^{n-k}c_k = c\varepsilon\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^{n-1-k}c_k + cc_n = (n\varepsilon + c)c_n \implies c_{n+1}/c_n = (\varepsilon + c/n)/(1+1/n)$ e segue que para $n >> 0$ $|c_{n+1}/c_n||z| < 1$, se $|z| < 1/\varepsilon$. Como ε foi escolhido de forma arbitrária (módulo a condição $\varepsilon > 1/\delta$) segue que $g(z)$ tem raio de convergencia pelo menos δ e dai segue que a série $\sum_i a_i(z-z_0)^i$ na região $D(z_0,\delta)$. ■

Teorema 3.2. *Sejam U um aberto simplesmente conexo em $\mathbb{C}$ e $A(z) \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$ matriz de funções holomorfas em $\mathbb{C}$. Então, existe única solução definida em U do sistema $D_A(U)$.*

Demonstração. (ver [1][Theorem 1]) Sejam $z \in U$ e $\alpha : [0,1] \longrightarrow U$ uma curva conectando z e z_0. Como $\alpha([0,1])$ é compacto temos que existe $r \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que todos os discos de raio r com centro em $\alpha([0,1])$ estão em U. Seja $A_1,...,A_k$ uma família de discos de raio $r/2$ tal que o centro z_i de A_i está em A_{i-1}. Pela lema acima, podemos encontrar $S_1,\cdots,S_k$ soluções do sistema nos discos tais que

(i) $S_1(z_0) = Y_0$.

(ii) S_i é uma continuação analítica da solução S_{j-1} para $j = 2,\cdots,k$.

Assim, S_1 admite continuação analítica ao longo da curva α. Como U é simplesmente conexo, pelo teorema de monodromia [1][Theorem 67, pag 225] segue que S_1 se extende a uma função holmorfa de U em $\mathbb{C}^n$ que é a solução procurada. ■

Definição 2. Sejam U um aberto simplesmente conexo e $X(z) = [X_1(z),\cdots,X_n(z)]$ uma matriz de funções holomorfas definias em U. Dizemos que $X(z)$ é uma solução fundamental do sistema $D_A(U)$ se

- As colunas de $X(z)$: $X_1(z),...,X_n(z)$ são soluções do sistema.
- $X(z) \in GL_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$.

O próximo teorema estabelece que a condição $X(z) \in GL_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$ é equivalente à $X(z_0) \in GL_n(\mathbb{C})$ para algum $z_0 \in U$.

Teorema 3.3. *Seja $X(z)$ uma matriz de função holomorfas definida em U e satisfazendo $X'(z) = A(z)X(z)$ em U. Seja $d(z) := \det X(z)$ e $t(z) := trX(z)$. Então, para todo $z_0 \in U$*

$$d(z) = d(z_0)\exp\left(\int_{z_0}^{z} t(v)dv\right) \qquad \text{em } U.$$

Demonstração. ver [1][Wronski's Identity] ■

Corolário 3.4. $\det X(z) \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)^* \iff \det X(z_0) \in \mathbb{C}^*$ para algum $z_0 \in U$.

Observação. *Seja U um aberto simplesmente conexo de $\mathbb{C}$ e considere*

$$S(U) := \{\alpha : U \longrightarrow \mathbb{C}^n \mid \alpha \text{ é solução de } D_A(U)\}.$$

Temos que $S(U)$ é um $\mathbb{C}$-módulo de dimensão n. De fato, fixe $z_0 \in U$. Pelo teorema de existência e unicidade, existe únicas soluções $\alpha_1, ..., \alpha_n \in S(U)$ tais que $\alpha_i(z_0) = E_i$, o i-esimo vetor da base canônica. Assim, pelo corolário acima $\alpha_1, ..., \alpha_n$ é $\mathbb{C}$-linearmente independente de modo que $\dim S(U) \geq n$. Não é dificil ver, como visto no caso $\mathbb{R}$, que $\dim S(U) \leq n$ de modo que $\dim S(U) = n$.

Teorema 3.5. *O feixe S é um feixe locamente constante de $\mathbb{C}$-módulos de posto n.*

Demonstração. Devemos provar que para qualquer $z_0 \in U$ existe uma vizinhança V de z_0 tal que $S|_V \cong \mathbb{C}^n$. Agora, como qualquer ponto $z_0 \in U$ possui uma vizinhança simplesmente conexa obtemos o resultado da observação anterior. ∎

Parte 2. Redução módulo primos

4. Redução módulo p

Seja $A(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}(t))$ matriz racional a coeficientes em $\mathbb{Q}$ e considere o sistema de equações diferenciais

$$X^{'}(t) = A(t)X(t) \qquad \textbf{(*)}$$

Definição 3. (cf.[10]) A n-curvatura de **(*)** é a matriz $A_n(t)$ definida recursivamente pondo

- $A_0(t) = id_n$;
- $A_{n+1}(t) = A^{'}_n(t) + A_n(t)A(t)$.

Definição 4. Seja p um inteiro primo. Diremos que p é um primo de boa redução da equação $(*)$ se existe $B(t) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_{(p)}[t])$ tal que $B(t) \otimes \mathbb{Q} = A(t)$. Aqui, $\mathbb{Z}_{(p)}$ é a localização de $\mathbb{Z}$ com respeito ao sistema multiplicativo $S = \mathbb{Z} - p\mathbb{Z}$.

Seja K um corpo arbitrário e $D : K \longrightarrow K$ uma derivação. Chamaremos o par (K, D) de um corpo diferencial.

Definição 5. Uma equação diferencial linear em (K, D) consiste em uma equação do tipo

$$E : D^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 D^0$$

onde $a_i \in K$. Uma solução de E consiste em um elemento $f \in K$ tal que $E(f) = 0$.

Um resultado que usaremos implicitamente no teorema abaixo é a seguinte proposição

Proposição 2. *Seja (K, d) um corpo diferencial e L/K uma extensão algébrica do tipo Galois. Então existe única derivação $D : L \longrightarrow L$ tal que $D|_K = d$.*

Demonstração. Escreva $L = k(\alpha)$ para algum elemento $\alpha \in L$. Agora, seja $m_\alpha(T) = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 \in k[T]$ o polinômio minimal de α. Considerando a identidade $m_\alpha(\alpha) = 0$ vemos que se uma tal derivação $D : L \longrightarrow L$, extendendo d, existe então aplicando D resulta:

$$0 = m^{'}_\alpha(\alpha)D(\alpha) = -(da_0 + da_1\alpha + \cdots + da_{n-1}\alpha^{n-1})$$

e daí, $D(\alpha) = -m^{'}(\alpha)^{-1}(da_0 + da_1\alpha + \cdots + da_{n-1}\alpha^{n-1})$.

Isso demonstra em particular, que D é única, se existir. Agora, defininido D pela regra acima, não é difícil verificar que $D : L \longrightarrow L$ é uma derivação extendendo d. ∎

Exemplo. *Sejam $K = \mathbb{F}_5(t)$, $d = \frac{\partial}{\partial t}$ e $a(t) = \frac{1}{t^2+1} \in \mathbb{F}_5(t)$. Considere a equação*

$$E : d - a(t)d^0 = 0.$$

Defina,

$$f(t) := \frac{-1 + t^2 - t^4 + t^6 - t^8}{-t^8 - t^7 + 3t^6 - 3t^5 - 2t^3 + 3t^2 + t - 1}$$

Um cálculo elementar mostra que $E(f) = 0$.

Observação. *Na demonstração do próximo teorema, ficará claro como encontrar uma solução de E mediante $a(t)$, algo que foi usado implicitamente aqui.*

5. p -CURVATURA E EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES

Teorema 5.1. *Seja $p \in \mathbb{Z}$ um primo de boa redução da equação acima e considere o sistema* **(*)** *módulo p. As seguintes afirmações são equivalentes*

- *(i) O sistema módulo p possui uma base de soluções algébricas sobre $\mathbb{F}_p(t)$.*
- *(ii) O sistema módulo p possui uma base de soluções em $\mathbb{F}_p(t)$.*
- *(iii) O sistema admite uma base de soluções em $\mathbb{F}_p((t))$.*
- *(iv) $A_p(t) \mod p = 0$.*

Demonstração. A implicação $(i) \Longrightarrow (ii)$ demonstra-se utilizando um argumento do tipo Galois: Seja $K|\mathbb{F}_p(t)$ uma extensão finita tal que todas as soluções da equação diferencial estão definidas sobre K. Sem perda de generalidade podemos supor que $K/\mathbb{F}_p(t)$ é Galois. Sejam, $f_1, ..., f_n \in K$ uma base de soluções. Então, se para cada i definirmos $g_i := \sum_{\sigma \in G_{K/\mathbb{F}_p(t)}} f_i^\sigma$ segue que $g_1, ..., g_n$ é uma base de soluções em $\mathbb{F}_p(t)$. A recíproca $(ii) \Longrightarrow (i)$ é evidente.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: trivial.

$(iii) \Rightarrow (iv)$: Observe que se $X(t)$ é uma solução de **(*)** temos que $X^{(n)}(t) = A_n(t)X(t)$, como pode ser visto por indução. Aplicando isso, e usando o fato de que $X^{(p)}(t) = 0 \mod p$ segue que $A_p(t) = 0 \mod p$.

$(iv) \Rightarrow (ii)$: Suponha que $A_p(t) = 0 \mod p$. Em particular, $A_{p-1}(t) = -A_{p-1}(t)A(t)$. Vamos mostrar que existe uma base de soluções para o sistema diferencial em $\mathbb{F}_p(t)$. Para isso, defina

$$Z(t) := \left[\sum_{j=0}^{p-1} \frac{(-1)^j t^j A_j}{j!} \right]^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p(t)).$$

Um cálculo elementar mostra que $Z^{'}(t) = Z(t)A$ de modo que as colunas da matriz $Z(t)$ formam uma base de soluções do sistema módulo p. ■

Exemplo. *Considere a equação $y^{'} = (1/t^2 + 1)y$ sobre $\mathbb{Q}(t)$ e tome $p = 5$. Calculando $A_5(t)$ e obtemos a fórmula*

$$A_5(t) = \frac{25 - 240t^2 + 120t^4}{t^{10} + 5t^8 + 10t^6 + 10t^4 + 5t^2 + 1}.$$

Pode-se verificar que $A_5(t) = 0 \mod 5$ e a proposição acima garante que existe base de soluções sobre $\mathbb{F}_5(t)$.

Observação. *Dada uma equação diferencial do tipo $y^{'} = a(x)y$, com $a(t) \in \mathbb{Q}(t)$ existe uma fóruma fechada para a p-curvatura. De fato, $A_p = a^{(p-1)} - a^p \mod p$ (cf.[10]).*

Consideremos agora o caso $n = 1$ e o sistema $y' = a(x)y$ para $a(x) \in \mathbb{Q}(x)^*$.

Teorema 5.2 (Honda). *São equivalentes*

(i) Existe solução algébrica sobre $\mathbb{Q}(x)$.
(ii) Existe solução $\mod p$ para quase todo primo p.
(iii) Seja $\sigma := adx \in \Omega^1_{\mathbb{Q}(x)/\mathbb{Q}}$. Então todos os pólos de σ, incluindo ∞, têm ordem 1 e os resíduos estão em $\mathbb{Q}$.

Demonstração. A implicação $(i) \implies (ii)$ é trivial. Agora, suponha que σ satisfaz (iii). Seja $m \in \mathbb{N}$ tal que $m\sigma$ tenha todos os residuos em $\mathbb{Z}$ e tome $f \in \overline{\mathbb{Q}}(x)$ tal que $df/f = m\sigma$. Então, $f^{1/m}$ é algébrica sobre $\mathbb{Q}(x)$ e satisfaz a equação $y' = a(x)y$. Assim, $(iii) \implies (i)$.

Para mostrar que $(ii) \implies (iii)$, usaremos o seguinte fato:

- Sejam K um corpo de número e $r \in K^*$. Suponha que para quasi-todo place $v \in \mathbb{P}(K)$ a redução $\overline{r} \in k_v$ é um elemento do corpo primo de v. Então $r \in \mathbb{Q}$.

Agora, assuma que (ii) vale. Seja K um corpo de número tal que todos os polos de σ estejam em $K \cup \{\infty\}$. Seja v um place de K tal que:

- σ tem boa redução sobre v.
- Os polos de σ são distintos em k_v.
- $y' = a(x)y$ tem solução f não nula em $k_v(x)$.

Escreva $f = \prod_i (x - f_i)^{m_i}$, aumentando k_v se necessário. Então, $df/f = \sum_i \frac{m_i}{x-f_i}dx$ tem polos de ordem no máximo 1 e todos os resíduos estão no corpo primo de k_v. Como isso vale para quese todo place v segue que os resíduos de σ são números algébricos tal que a redução para quasi todo place v é um elemento do corpo primo. Pelo fato acima, segue que os resíduos de σ estão em $\mathbb{Q}$. ∎

A proposição acima é o caso $n = 1$ da seguinte (ver [10])

Conjectura 5.3 (Grothendieck-Katz). *Seja $L(y)$ o operador diferencial*

$$L(y) := y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y + a_0 y$$

com $a_i \in \mathbb{Q}(x)$. São equivalentes

(1) $L(y) = 0$ possui n-soluções linearmente independentes sobre $\overline{\mathbb{Q}}$ que são algébricas sobre $\mathbb{Q}(x)$.
(2) Para quasi-todo primo p, a equação obtida por redução módulo p, $L_p(y) = 0$ possui n-soluções linearmente independentes sobre $\mathbb{F}_p(x^p)$ que estão no corpo $\mathbb{F}_p(x)$.

Observação. *Mais adiante daremos uma reformulação da conjectura em termos de conexões.*

Parte 3. Conexões, curvatura e p-curvatura

Seja k um corpo e X uma variedade algébrica sobre k.

Definição 6. Uma conexão em X consiste em um par $(\mathcal{F}, \nabla)$ onde $\mathcal{F}$ é um feixe coerente em X e ∇ é uma aplicação k-linear

$$\nabla : \mathcal{F} \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{F}$$

satisfazendo uma identidade do tipo Leibnitz: para qualquer seções locais $f \in \mathcal{O}_X$ e $s \in \mathcal{F}$ temos $\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla(s)$, onde df denota a imagem de f pelo mapa diferencial $d : \mathcal{O}_X \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$.

O núcleo de ∇ é um chamado de feixe das seções horizontais de ∇ e é denotado por $\mathcal{F}^{\nabla}$. Diremos que $\mathcal{F}$ é trivial se é gerado como $\mathcal{O}_X$-módulo por $\mathcal{F}^{\nabla}(X)$.

Dada uma conexão $(\mathcal{F}, \nabla)$ obtemos naturamente mapas em diferenciais de ordem superior

$$\nabla_i : \Omega^i_{X/k} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \Omega^{i+1}_{X/k} \otimes \mathcal{F}.$$

que são definidos pela regra $\nabla_i(\omega \otimes s) = d\omega \otimes s + (-1)^i \omega \wedge \nabla(s)$.

Observação. *∇_i são k-mapas, mas em geral não são $\mathcal{O}_X$-mapas.*

Definição 7. Seja $(\mathcal{F}, \nabla)$ um conexão em X. A **curvatura** de ∇ é o mapa $K(\nabla) := \nabla_1 \circ \nabla : \mathcal{F} \longrightarrow \Omega^2_{X/k} \otimes \mathcal{F}$.

Proposição 3. *Para $i > 0$ temos $\nabla_{i+1} \circ \nabla_i(\omega \otimes s) = \omega \otimes K(\nabla)(s)$. Em particular, se $(\mathcal{F}, \nabla)$ é uma equação diferencial em X então obtemos um complexo de feixes*

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \Omega^2_{X/k} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \cdots$$

Demonstração. Temos

$$\nabla_{i+1} \circ \nabla_i(\omega \otimes s) = \nabla_{i+1}(d\omega \otimes s + (-1)^i \omega \wedge \nabla(s)) =$$
$$\nabla_{i+1}(d\omega \otimes s) + (-1)^i \nabla_{i+1}(\omega \wedge \nabla(s)).$$

Pela linearidade, podemos supor $\nabla(s) = \sigma \otimes t$. Daí resulta,

$$\nabla_{i+1}(d\omega \otimes s) = (-1)^{i+1} d\omega \wedge \nabla(s)$$
$$\nabla_{i+1}(\omega \wedge \nabla(s)) = \nabla_{i+1}(\omega \wedge \sigma \otimes t) = d(\omega \wedge \sigma) \otimes t + (-1)^{i+1} \omega \wedge \sigma \wedge \nabla(t)$$

Daí vem,

$$\nabla_{i+1} \circ \nabla_i(\omega \otimes s) = (-1)^{i+1} d\omega \wedge \nabla(s) + (-1)^i (d(\omega \wedge \sigma) \otimes t + (-1)^{i+1} \omega \wedge \sigma \wedge \nabla(t))$$

Temos $d(\omega \wedge \sigma) \otimes t = d\omega \wedge \sigma \otimes t + (-1)^i \omega \wedge d\sigma \otimes t$. Substituindo na formula acima acima e realizando as devidas simplificações obtemos $\nabla_{i+1} \circ \nabla_i(\omega \otimes s) = \omega \wedge K(s)$. ■

Observação. *K é $\mathcal{O}_X$-linear. De fato, sejam $f \in \mathcal{O}_X$ e $s \in \mathcal{F}$. Então, $K(fs) = \nabla_1 \circ \nabla(fs) = \nabla_1(ds \otimes s + f\nabla(s)) = -df \otimes \nabla(s) + df \otimes s + f\nabla(\nabla(s)) = fK(s)$.*

Definição 8. Dizemos que $(\mathcal{F}, \nabla)$ é integrável se $K(\nabla) = 0$. Uma **equação diferencial** em uma variedade algébrica X/k é uma conexão integravel em X.

Observação. *A escolha para o nome **equação diferencial em** X/k é justificada pelo seguinte caso: Seja $y' = a(z)y$ uma equação diferencial em $\mathbb{C}$ e suponha que $a(z) \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1)$ com polos $\{a_1, \cdots, a_n\}$. Podemos definir naturalmente uma conexão holomorfa em $U := \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} - \{a_1, \cdots, a_n\}$ pondo:*

$$\nabla_a : \mathcal{O}_U \longrightarrow \Omega^1_U \otimes \mathcal{O}_U$$

que explicitamente é dada por $\nabla_a(f) := df + afdt$ para qualquer $f \in \mathbb{C}(t)$ regular em U. Temos que $(\mathcal{O}_U, \nabla_a)$ é uma equação diferencial em $U \subset \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$.

Exemplo. *Seja $\mathcal{F} = \mathcal{O}_X$ e $\nabla := d + \omega$ para algum $\omega \in \Omega_{X/k}$. Então, $(\mathcal{O}_X, \nabla)$ é uma equação diferencial em X se e somente se ω é fechada. De fato, usando as definições temos que $K(\nabla) = d\omega$*

Seja $D \in \mathbf{Der}_k(\mathcal{O}_X)$ uma k-derivação e denote por $\overline{D}$ o $\mathcal{O}_X$-mapa correspondente em $\mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/k}, \mathcal{O}_X)$[1]. Obtemos assim um mapa de k-feixes $\Omega^1_{X/k} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}$ que associa $\omega \otimes s \mapsto \overline{D}(\omega)s$. Isso determina uma k-mapa

$$\mathcal{F} \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F} : \qquad s \mapsto (\overline{D} \otimes id)\nabla(s).$$

e por conseguinte uma mapa de k-feixes

$$\psi_\nabla : \mathbf{Der}_k(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathbf{End}_k(\mathcal{F}) : \qquad D \mapsto (\overline{D} \otimes id) \circ \nabla$$

Definição 9. Dizemos que ψ_∇ é um k-mapa de Lie se para quaisquer $D_1, D_2 \in \mathbf{Der}_k(\mathcal{O}_X)$ vale

$$\psi_\nabla([D_1, D_2]) = [\psi_\nabla(D_1), \psi_\nabla(D_2)].$$

Exemplo. *Vamos descrever o mapa acima localmente. Seja $X = Spec(A)$ para A uma k-álgebra lisa de dimensão d (e.g. $A = k[X_1, ..., X_d]$). Nesse caso, existem $s_1, ..., s_d \in A$ tais que $\Omega_{A/k} = Ads_1 \oplus \cdots \oplus Ads_d$.*

Sejam $\partial_1, \cdots, \partial_d$ elementos formando uma A-base de $Der_k(A)$ dual a $ds_1, ..., ds_d$. Seja M um A-módulo livre equipado com uma estrutura diferencial $\nabla : M \longrightarrow \Omega_{A/k} \otimes M$. Sejam $e_1, ..., e_n$ elementos de M formando uma A-base. Dado $D = \sum_i b_i\partial_i \in Der_k(A)$ consideremos o A-mapa $i_D : \Omega_{A/k} \longrightarrow A$ que associa $\sum_i a_i ds_i \mapsto \sum_i a_i D(ds_i) = \sum_i a_i b_i$. Temos

$$\psi_\nabla : Der_k(A) \longrightarrow End_k(M) : \qquad D \mapsto i_D \circ \nabla.$$

Aqui, $\nabla(e_k) = \sum_{i,j} a^j_{i,k} ds_i \otimes e_j$. Daí, $\psi_\nabla(D)(e_k) = i_D(\sum_{i,j} a^j_{i,k} ds_i \otimes e_j) = \sum_{i,j} a^j_{i,k} b_i e_j$.

Proposição 4. *Sejam $(\mathcal{F}, \nabla)$ uma conexão em uma variedade algébrica X/k e ψ o mapa definido acima. Então,*

$$(\mathcal{F}, \nabla) \text{ é uma equação diferencial em } X \Longleftrightarrow \psi_\nabla \text{ é um } k\text{-mapa de Lie}$$

Isso é consequência direta do seguinte

Lema 1. *Para quaisquer $D_1, D_2 \in \boldsymbol{Der}_k(\mathcal{O}_X)$ temos*

$$(D_1 \wedge D_2 \otimes id) \circ \nabla_1 \circ \nabla = -\overline{[D_1, D_2]} \otimes id \circ \nabla + [\overline{D_1} \otimes id \circ \nabla, \overline{D}_2 \otimes id \circ \nabla]$$

Demonstração. É suficiente considerar o caso local onde $X = Spec(A)$, para alguma k-álgebra lisa.

Seja M um A-módulo livre com base $\{e_1, ..., e_n\}$ equipado com uma estrutura diferencial $\nabla : M \longrightarrow M \otimes \Omega^1_{A/k}$. Sejam $X_1, ..., X_n \in A$ tais que $dX_1, ..., dX_n$ formam uma base para $\Omega^1_{A/k}$ como A-módulo. Fixe $\partial_{X_1}, ..., \partial_{X_n}$ base de T_X dual a $\{dX_1, ..., dX_n\}$.

Sejam $D_1 = \sum_i \alpha_{1,i}\partial_{X_i}$ e $D_2 = \sum_i \alpha_{2,i}\partial_{X_i}$ duas derivações. Se $\nabla(e_k) = \sum_{i,j} a^j_{i,k} dX_i \otimes e_j$ não é difícil verificar que vale as seguintes fórmulas:

$$(i_{D_1 \wedge D_2})(K(e_k)) =$$
$$\sum_{i,j,p} \partial_{X_p}(a^j_{i,k})(\alpha_{p,1}\alpha_{i,2} - \alpha_{p,2}\alpha_{1,i})e_j + \sum_{i,j,p,h} a^j_{i,k} a^h_{p,j}(\alpha_{1,p}\alpha_{2,i} - \alpha_{2,p}\alpha_{1,i})e_h$$
$$i_{[D_1,D_2]}(\nabla(e_k)) = \sum_{i,j,p} a^j_{i,k}[\alpha_{1,p}\partial_{X_p}\alpha_{2,i} - \alpha_{2,p}\partial_{X_p}\alpha_{1,i}]e_k.$$

[1] relembre que existe um isomorfismo natural de $\mathcal{O}_X$-módulos $\mathbf{Der}_k(\mathcal{O}_X) \cong \mathbf{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\Omega^1_{X/k}, \mathcal{O}_X)$

Defina $T_i := i_{D_i} \circ \nabla$ para $i \in \{1,2\}$. Então temos

$$(T_1 \circ T_2)(e_k) = \sum_{i,j,p}[\alpha_{2,i}\partial_{X_p}a^j_{i,k} + a^j_{i,k}\partial_{X_p}\alpha_{2,i}]\alpha_{1,p}e_j + \sum_{p,h} a^h_{p,j}a^j_{i,k}\alpha_{2,i}\alpha_{1,p}e_h$$
$$(T_2 \circ T_1)(e_k) = \sum_{i,j,p}[\alpha_{1,i}\partial_{X_p}a^j_{i,k} + a^j_{i,k}\partial_{X_p}\alpha_{1,i}]\alpha_{2,p}e_j + \sum_{p,h} a^h_{p,j}a^j_{i,k}\alpha_{1,i}\alpha_{2,p}e_h$$

Daí,

$$[T_1, T_2](e_k) = \sum_{i,j,p}[(\alpha_{1,i}\alpha_{2,p} - \alpha_{2,i}\alpha_{1,p})\partial_{X_p}(a^j_{i,k})]e_j +$$
$$\sum_{i,j,p}[a^j_{i,k}\partial_{X_p}(\alpha_{1,i})\alpha_{2,p} - a^j_{i,k}\partial_{X_p}(\alpha_{2,i})\alpha_{i,p}]e_j + \sum_{i,j,h,p} a^h_{p,j}a^j_{i,k}(\alpha_{2,i}\alpha_{1,p} - \alpha_{1,i}\alpha_{2,p})e_h.$$

Em particular, $[T_1, T_2](e_k) - i_{[D_1,D_2]}(\nabla(e_k)) = (i_{D_1 \wedge D_2})(K(e_k))$ para todo k. ■

6. Algumas construções

Seja X uma variedade lisa definida sobre k. Denotaremos por $\mathbf{E.D}(X/k)$ a categoria com

(i) $Obj(\mathbf{E.D}(X/k)) :=$ equações diferenciais em X

(ii) Dados $(\mathcal{F}, \nabla)$ e $(\mathcal{F}', \nabla')$ um mapa $f : (\mathcal{F}, \nabla) \longrightarrow (\mathcal{F}', \nabla')$ consiste em $\mathcal{O}_X$-mapa tal que para qualquer $D \in \mathbf{Der}_k(\mathcal{O}_X)$ o seguinte diagrama seja comutativo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\psi_\nabla(D)"'] \arrow[d, "f"] & \mathcal{F} \arrow[d, "f"'] \\ \mathcal{G} \arrow[r, "\psi_{\nabla'}(D)"] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

Um mapa $\Phi : \mathbf{Der}_k(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathbf{End}_k(\mathcal{F})$ é dito um $\mathcal{O}_X$-mapa Leibnitz se para quaisquer seções locais $f \in \mathcal{O}_X$, $s \in \mathcal{F}$ e derivação $D \in \mathbf{Der}_k(\mathcal{O}_X)$ temos

$$\Phi(fD) = f\Phi(D) \quad \text{e} \quad \Phi(D)(fs) = D(f)s + f\Phi(D)(s).$$

Lema 6.1. *Sejam X uma variedade lisa sobre k e $\mathcal{F}$ um feixe localmente livre em X. Existe uma correspondência 1-1:*

$$\{ \text{ conexões em } \mathcal{F} \} \longrightarrow \{ \mathcal{O}_X\text{- mapas Leibniz } \boldsymbol{Der}_k(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \boldsymbol{End}_k(\mathcal{F}) \}$$

que associa $\nabla \mapsto \psi_\nabla$.

Demonstração. Seja $\Phi : \mathbf{Der}_k(\mathcal{O}_X) \longrightarrow \mathbf{End}_k(\mathcal{F})$ um mapa $\mathcal{O}_X$-linear Leibniz. Dada uma seção local $s \in \mathcal{F}$ e $D = \sum_i a_i\partial_i$ definimos $\nabla_\Phi(s)(D)$, pondo

$$\nabla_\Phi(s)(D) = \Phi(D)(s) \in \mathcal{F}$$

Temos que ∇_ϕ é uma conexão: $\nabla_\phi(fs)(D) = \Phi(D)(fs) = D(df)s + f\Phi(D)(s)$. ■

Produto tensorial e Hom: Sejam $E_1 = (\mathcal{F}, \nabla)$ e $E_2 := (\mathcal{G}, \nabla')$ duas equações diferencais em X. O produto tensorial de E_1 por E_2 é o par

$$E_1 \otimes E_2 := (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}, \nabla'')$$

onde para qualquer $D \in \mathbf{Der}_k(\mathcal{O}_X)$ definimos ∇'' pela regra:

$$\psi_{\nabla''}(D)(s \otimes t) := \psi_\nabla(D)(s) \otimes t + s \otimes \psi_{\nabla'}(D)(t).$$

A conexão “mapas” de E_1 para E_2 é construída pondo:

$$Hom(E_1, E_2) := (Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \nabla^{''})$$

onde para qualquer $D \in \mathbf{Der}_k(\mathcal{O}_X)$ definimos $\nabla^{''}$ pela regra:

$$\psi_{\nabla''}(D)(f) := \psi_{\nabla'}(D) \circ f - f \circ \psi_{\nabla}(D)$$

Os objetos definidos acima são de fato equações diferenciais em X

Proposição 5. $E_1, E_2 \in \boldsymbol{E.D}(X/k) \Longrightarrow E_1 \otimes E_2 \quad e \quad Hom(E_1, E_2) \in \boldsymbol{E.D}(X/k)$.

Demonstração. Vamos mostrar que $E_1 \otimes E_2 \in \mathbf{E.D}(X/k)$. Note que $\psi_{\nabla''}$ é uma conexão. De fato, é suficiente mostrar que o mapa $\psi_{\nabla''}$ é um $\mathcal{O}_X$-mapa de tipo Leibniz. Para isso, seja D uma derivação e $f \in \mathcal{O}_X$ e $s \otimes t \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ seções locais. Então,

$$\psi_{\nabla''}(D)(f(s \otimes t)) = \psi_{\nabla''}(D)((fs) \otimes t) = \psi_{\nabla}(D)(fs) \otimes t + fs \otimes \psi_{\nabla'}(D)(t) =$$
$$D(f)s \otimes t + f\psi_{\nabla}(D)(s) \otimes t + fs \otimes \psi_{\nabla'}(D)(t) = D(f)(s \otimes t) + f\psi_{\nabla''}(D)(s \otimes t).$$

Um cálculo similar mostra que $\psi_{\nabla''}$ satisfaz $\psi_{\nabla''}(fD) = f\psi_{\nabla''}(D)$ de modo que $\nabla^{''}$ é uma conexão em $\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{G}$. Resta mostrar que $\psi_{\nabla''}$ é um mapa de Lie. Para isso tome D_1, D_2 duas derivações e $s \otimes t$ uma seção local de $\mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$. Temos

$$[\psi_{\nabla''}(D_1), \psi_{\nabla''}(D_2)](s \otimes t) =$$
$$\psi_{\nabla''}(D_1)[\psi_{\nabla}(D_2)(s) \otimes t + s \otimes \psi_{\nabla'}(D_2)(t)] - \psi_{\nabla''}(D_2)[\psi_{\nabla}(D_1)(s) \otimes t + s \otimes \psi_{\nabla'}(D_1)(t)] =$$
$$\begin{aligned} &\psi_{\nabla}(D_1)(\psi_{\nabla}(D_2)(s)) \otimes t + s \otimes \psi_{\nabla'}(D_1)\psi_{\nabla'}(D_2)(t) \\ &- \psi_{\nabla}(D_2)(\psi_{\nabla}(D_1)(s)) \otimes t - s \otimes \psi_{\nabla'}(D_2)\psi_{\nabla'}(D_1)(t) \\ &\qquad = [\psi_{\nabla}(D_1), \psi_{\nabla}(D_2)](s) \otimes t + s \otimes [\psi_{\nabla'}(D_1), \psi_{\nabla'}(D_2)](t). \end{aligned}$$

Pela integrabilidade de ∇ e $\nabla^{'}$ segue que

$$[\psi_{\nabla''}(D_1), \psi_{\nabla''}(D_2)](s \otimes t) = \psi_{\nabla''}([D_1, D_2])(s \otimes t).$$

■

6.1. **Propriedades funtoriais.** Sejam X e Y variedades sobre k e $f : Y \longrightarrow X$ um mapa. Então f induz dois funtores

$$\begin{array}{lll} f^* : \mathbf{E.D}(X/k) \longrightarrow \mathbf{E.D}(Y/k) & & (\mathcal{F}, \nabla) \mapsto (f^*\mathcal{F}, f^*\nabla) \\ f_* : \mathbf{E.D}(Y/k) \longrightarrow \mathbf{E.D}(X/k) & & (\mathcal{G}, \nabla) \mapsto (f_*\mathcal{G}, \nabla) \end{array}$$

que são contruidos da seguinte forma:

Caso f^*:

(i) $f^*\mathcal{F} := f^{-1}\mathcal{F} \otimes_{f^{-1}\mathcal{O}_Y} \mathcal{O}_X$

(ii) $f^*\nabla : f^*\mathcal{F} \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{F}$ é o mapa induzido pelo seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} f^*\mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "f"] & f^*(\Omega^1_{Y/k} \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{F}) \cong f^*\Omega^1_{Y/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{F} \arrow[dl] \\ \Omega^1_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} f^*\mathcal{F} & \end{tikzcd}$$

Caso f_*:

(i) $f_*\mathcal{G}$ é o $f_*\mathcal{O}_Y$-módulo que associa $U \mapsto \mathcal{G}(f^{-1}(U))$. Observe que podemos equipar $f_*\mathcal{G}$ com uma estrutura $\mathcal{O}_X$-módulo via o mapa $f^{\#} : \mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_Y$.

(ii) $f_*\nabla : f_*\mathcal{G} \longrightarrow \Omega^1_{X/k} \otimes_{\mathcal{O}_X} f_*\mathcal{F}$ é o mapa que associa $f_* : gs \mapsto d(g) \otimes s + f^{\#}(g)\nabla(s)$ para $g \in \mathcal{O}_X$ e $s \in f_*\mathcal{G}$ seções locais.

Parte 4. **Equações diferenciais em geral**

7. Variedades sobre $\mathbb{C}$

Seja X uma variedade complexa conexa.

Proposição 6. *Seja $p : Y \longrightarrow X$ um homeomorfismo local. Então, Y admite única estrutura de variedade complexa tal que p é um mapa holomorfo.*

Demonstração. Seja $P \in Y$ e $f : U \subset X \longrightarrow \mathbb{C}^n$ uma carta sobre $Q = f(P)$. Seja $V \subset U$ tal que $f^{-1}(V) \longrightarrow V$ é um homeomorfismo. Então obtemos uma carta sobre P considerando a composição

$$f|_V \circ p|_{f^{-1}(V)} : f^{-1}(V) \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{C}^n.$$

■

Definição 10. Seja X uma variedade complexa. Um **sistema local** em X é um feixe $\mathcal{F}$ em X tal que para todo $Q \in X$ existe um aberto U tal que $\mathcal{F}_{|U} = G$ para algum conjunto G.

Definição 11. Seja X uma variedade complexa. Um **sistema local complexo** em X é um feixe $\mathcal{F}$ em X tal que para todo $Q \in X$ existe um aberto U tal que $\mathcal{F}_{|U} = G$ para algum $\mathbb{C}$-espaço vetorial G com $\dim_{\mathbb{C}} G < \infty$.

Como estamos assumindo que X é conexa, dado um sistema local complexo $\mathcal{F}$ faz sentido em falar de posto de $\mathcal{F}$. Mais precisamente, fixe $Q \in X$ e seja U um aberto tal que $\mathcal{F}|_U = G \cong \mathbb{C}^n$. Definimos $\mathbf{rank}(\mathcal{F}) := n$.

Nessa seção estaremos interessados nas seguintes categorias:

- **Cov**(X)**:** Um objeto consiste de um recobrimento $f : Y \longrightarrow X$. Dados dois recobrimentos Y/X e Z/X um mapa entre eles consiste em uma aplicação continua $f : Y \longrightarrow X$ tal que o digrama abaixo é comutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{f} & Z \\ & \searrow & \downarrow \\ & & X \end{array}$$

- **Fib**$_p(X)$**:** Fixado $p \in X$, **Fib**$_p(X)$ consiste na categoria cujos objetos são conjuntos equipados com uma $\pi_1(X,p)$-ação à esqueda e morfismos sendo mapas de $\pi_1(X,p)$-conjuntos.
- $\mathcal{A}_X$**:** Objetos consistem em sistemas locais em X. Morfismos são mapas estre feixes.
- $\mathcal{A}_X(\mathbb{C})$**:** Objetos consistem em sistemas locais complexos em X. Morfismos são mapas de $\mathbb{C}$-feixes.

Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas categorias e $F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ um funtor. Relembre que F é uma equivalência de categorias se para todo objeto $B \in \mathcal{B}$ existe $A \in Obj(\mathcal{A})$ tal que $F(A) = B$ e se $Hom_{\mathcal{A}}(A, A^{'}) \cong Hom_{\mathcal{B}}(F(A), F(A^{'}))$ para quaisquer objetos $A, A^{'}$ em $\mathcal{A}$.

Teorema 7.1. *Existe uma equivalência de categorias*

$$\mathcal{A}_X \cong \boldsymbol{Cov}(X) \cong \boldsymbol{Fib}_p(X).$$

Demonstração. Daremos um esboço. Um argumento completo pode ser encontrado no livro [9][Theorem 2.3.4, Theorem 2.5.9]. Sejam $f : Y \longrightarrow X$ um recobrimento e $p \in X$. Pela teoria geral, sabemos que dado $[\sigma] \in \pi_1(X, p)$ e $q \in f^{-1}(p)$ existe um único levantamento, módulo homotopia, de σ à Y, denotado por $\overline{\sigma}$, tal que $\overline{\sigma}(0) = q$. Isso determina uma ação de $\pi_1(X, p)$ na fibra $f^{-1}(p)$, pondo $[\sigma].q := \overline{\sigma}(1)$.

Agora, dado uma sistema local $\mathcal{F}$ de $\mathbb{C}$-módulos obtemos um recobrimento de X, considerando o espaço etale associado ao feixe $\mathcal{F}$ que é explicitamente construido da seguinte forma:

A nível de conjuntos é $X_{\mathcal{F}} := \coprod_{P \in X} \mathcal{F}_P$. Observe que obtemos naturalmente um mapa projeção: $\pi_{\mathcal{F}} : X_{\mathcal{F}} \longrightarrow X$ que associa $< q, s_q > \mapsto q$. Uma seção $s \in \mathcal{F}(U)$ naturalmente induz uma seção do mapa $\pi_{\mathcal{F}}$ restrita a $\overline{s} : U \ni q \mapsto s_q$. Equipamos $X_{\mathcal{F}}$ com a topologia forte exigindo que para todo aberto U e seção $s \in \mathcal{F}(U)$ a seção induzida $\overline{s} : U \longrightarrow X_{\mathcal{F}}$ seja continua.

∎

Observação. *Seja X uma variedade complexa e considere o functor covariante*

$$F : \boldsymbol{Cov}(X) \longrightarrow \boldsymbol{Fib}_p(X) \qquad (f : Y \longrightarrow X) \mapsto f^{-1}(p)$$

Pode-se provar que F é funtor representável. O objeto que o representa, único módulo isorfismo, é chamado de recobrimento universal de X.

Definição 12. Seja G um grupo. Uma $\mathbb{C}$-representação finita é um homomorfismo de grupos

$$\Phi : G \longrightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Um morfismo entre duas $\mathbb{C}$-representações $\Phi_1 : G \longrightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n)$, $\Phi_2 : G \longrightarrow \mathbf{Aut}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^m)$ é um mapa $\mathbb{C}$-linear $f : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^m$ tal que o digrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^n \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "\Phi_1"] & \mathbb{C}^m \arrow[d, "\Phi_2"'] \\ \mathbb{C}^n \arrow[r, "f"] & \mathbb{C}^m \end{tikzcd}$$

é comutativo i.e. $f \circ \Phi_1(g) = \Phi_2(g) \circ f$ para todo $g \in G$. Denote por $\mathbf{Rep}(G)$ a categoria de $\mathbb{C}$-representações finitas com morfismos definidos como acima.

Corolário 7.2. Seja X uma variedade complexa. Existe uma equivalência de categorias

$$\mathcal{A}_X(\mathbb{C}) \cong \mathbf{Rep}(\pi_1(X))$$

Demonstração. Seja $\mathcal{F}$ um sistema local de $\mathbb{C}$-módulos e $P \in X$. Pelo mapa que realiza a equivalência $\psi : \mathcal{A}_X \cong \mathbf{Fib}_p(X)$ sabemos que ψ leva $\mathcal{F}$ em $\mathcal{F}_P \cong \mathbb{C}^N$. Assim, dar um sistema local de $\mathbb{C}$-módulos é equivalente a dar um $\mathbb{C}$-espaço vetorial de dimensão finita equipado com uma ação de $\pi(X)$ i.e. uma representação finita de $\pi(X)$. ∎

Vejamos um pequeno exemplo:

Exemplo. *Sejam $R >> 1$ real e $U := D(0, R)$. Defina $U^* := U - \{0\}$ e seja $f \in \mathcal{M}(U)$ holomorfa em U^* com polo em $z = 0$. Vamos descrever a monodromia* *baseada em* $z := 1$ *i.e. imagem do mapa* $\Phi : \pi_1(U^*, 1) \longrightarrow GL_1(\mathcal{F}_1)$ *onde* $\mathcal{F}$ *é o feixe de soluções associado a equação diferencial*

$$y^{'} = fy.$$

Como $\pi_1(U^*, 1) = \mathbb{Z}[\gamma]$ *onde* $\gamma : [0, 1] \longrightarrow U^*$ *é o caminho que associa* $t \mapsto \exp(2\pi t)$, *é suficiente definir* $\Phi([\gamma])$. *Dado* $s \in \mathcal{F}_1$ *temos que* $\Phi([\gamma])(s) = ms$ *é a continuação analítica de* s *ao longo do caminho* γ. *Agora,* $U^* = U_0 \cup U_1$, *onde* $U_0 := \{z \in U^* \mid im(z) \notin (0, \infty)\}$ *e* $U_1 := \{z \in U^* \mid im(z) \notin (-\infty, 0)\}$. *Temos* $U_0 \cap U_1 = V_+ \amalg V_-$ *onde* $V_+ = \{z \in U^* \mid re(z) > 0\}$ *e* $V_- = \{z \in U^* \mid re(z) < 0\}$. *Agora,* U_i *simplesmente conexo implica que existe* $g_i \in \mathcal{O}(U_i)$, *primitiva para* f *em* U_i. *Como* g_0 *e* g_1 *diferem por uma constante cada componente conexa de* $U_0 \cap U_1$, *podemos supor que* $g_0 = g_1$ *em* V_-. *Agora, fixe* $\exp(g_1)$ *uma base para soluções em* $\mathcal{F}_1$. *Então, realizando a continuação analítica ao longo de* γ *obtemos* $m \exp(g_0)$, *para algum* $m \in \mathbb{C}$. *Como a continuação analítica envolve a percorrer cada componente conexa de* $U_0 \cap U_1$, *obtemos* $m \exp(g_0) = \exp(g_1)$. *Em particular, avaliando em* $z = 1$, *resulta* $m \exp(g_0(1)) = \exp(g_1(1))$. *Daí,* $m = \exp(g_1(1) - g_0(1))$

$$= \exp(g_1(1) - g_1(-1) + g_0(-1) - g_0(1)) = \exp(\int_\gamma f) = \exp(2\pi i \ \boldsymbol{Res}\ _0(f)).$$

Observação. *No exemplo acima vemos que a imagem da representação associada a equação diferencial* $y^{'} = fy$ *é finita se e somente se* $Res_0(f) \in \mathbb{Q}$ *se e somente se* $\overline{Res_0(f)} \in \mathbb{F}_p$ *para quase-todo primo* p, *onde* $\overline{Res_0(f)}$ *denota a redução módulo* p *de* $Res_0(f)$.

O principal teorema da seção é o seguinte

Teorema 7.3. *(Correspondência de Riemann-Hilbert) Seja* X *uma variedade complexa. Então, existe uma equivalência de categorias*[2]

$$\mathbf{E.D.A}(X/\mathbb{C}) \cong \mathcal{A}_X(\mathbb{C}) \qquad (\mathcal{F}, \nabla) \mapsto \mathcal{F}^\nabla.$$

onde $\mathcal{F}^\nabla$ *é o feixe que a cada aberto* $U \subset X$ *associa*

$$U \mapsto \mathcal{F}^\nabla(U) := \{s \in \mathcal{F}(U) \mid \nabla(s) = 0\}.$$

A aplicação que associa um sistema local de $\mathbb{C}$-módulos a uma equação diferencial analítica em X pode ser descrita explicitamente pondo

$$\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_X := \mathcal{F} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X.$$

Devemos provar que $\mathcal{F}^\nabla$ é um sistema local e que $\mathcal{F}^\nabla \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X \cong \mathcal{F}$. A prova do teorema acima apresentada aqui segue de perto a prova contida em [?]. Relembramos inicialmente algumas generalidades sobre distribuições em variedades complexas.

Definição 13. Seja X uma variedade complexa. Uma distribuição holomorfa $\mathcal{D}$ de dimensão $d \leq \dim X$ em X consiste em uma coleção de $\mathbb{C}$-espaços $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_P\}_{P \in X}$ com $\mathcal{D}_P \subset T_{X,P}$ um $\mathbb{C}$-subespaço de dimensão d que varia de holomorficamente no seguinte sentido:

Para cada $P \in X$ existe uma vizinhaça U de P e campos holomorfos $v_1, ..., v_d \in T_X(U)$ tais que $\mathcal{D}_P = \langle v_{1,P}, ..., v_{d,P} \rangle$ para todo $P \in U$, onde $v_{i,P}$ denota o germe de v_i em torno de P.

[2]para X uma variedade complexa, denotaremos por $\mathbf{E.D.A}(X/\mathbb{C})$ a categoria cujos objetos são equações diferenciais analíticas em X.

Definição 14. Seja X uma variedade complexa e $\mathcal{D}$ uma distribuição em X. Seja $v \in T_X(X)$. Dizemos que $v \in \mathcal{D}$ se para todo $P \in X$ temos que $v_P \in \mathcal{D}_P$.

Uma distribuição holomorfa $\mathcal{D}$ é dita **integrável** se $[v_1, v_2] \in \mathcal{D}$ para quaisquer $v_1, v_2 \in \mathcal{D}$.

Definição 15. Seja $Y \subset X$ uma subvariedade analítica de dimensão d e $\mathcal{D}$ uma distribuição holomorfa em X de dimensão d. Dizemos que Y é uma variedade integral da distribuição $\mathcal{D}$ se para cada $P \in Y$ temos $T_{Y,P} = \mathcal{D}_P$.

Teorema 7.4. *(Frobenius) Seja X uma variedade complexa e $\mathcal{D}$ uma distribuição holomorfa integrável de dimensão d em X. Então para cada $P \in X$ existe uma única subvariedade integral de $\mathcal{F}$ passando por P.*

Exemplo. *Seja $X := \mathbb{C}^2 - \{(0,0)\}$ e considere o campo holomorfo definido pondo*

$$v := X\partial_X + Y\partial_Y \in T_X$$

Para cada $P = (a,b) \in U$ defina $\mathcal{D}_P := \mathbb{C}v_P$ onde $v_P := a\partial_X|_P + b\partial_Y|_P$. Então, $\mathcal{D} := \{\mathcal{D}_P\}$ é uma distruição holomorfa de dimensão 1 em U. Além disso, para cada $\alpha \in \mathbb{C}$, temos que $Y_\alpha := V(\langle X + \alpha Y\rangle) \cap U$ é uma subvariedade integral de $\mathcal{D}$.

Vamos provar a correspondência de Riemann-Hilbert. Comecemos com o seguinte

Lema 7.5. *Sejam $(\mathcal{F}, \nabla)$ uma equação diferencial analítica em X e $P \in X$. Existe uma vizinhança U de p tal que O mapa $\mathcal{F}^\nabla(U) \longrightarrow \mathcal{F}_p \otimes_{\mathcal{O}_{X,p}} \mathcal{O}_{X,p}/\mathcal{M}_{X,p}$ que associa $s \mapsto s_p \otimes 1$ é um isomorfismo de $\mathbb{C}$-módulos.*

Demonstração. Seja $(\mathcal{F}, \nabla)$ uma conexão holomorfa em X. A prova do lema será dividida em passos:

Passo 1 - construção de uma distribuição $\mathcal{F}$ no fibrado $V_X(\mathcal{F})$: Relembre que dado um feixe localmente livre de posto m em X podemos construir uma variedade complexa $V_X(\mathcal{F})$ munida de uma estrutura de fibrado vetorial de posto m sobre X. A construção é realizada da seguinte forma:

- Seja $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i \in I}$ uma cobertura trivializante para $\mathcal{F}$ e defina $V_X(\mathcal{F}) := \coprod_i U_i \times \mathbb{C}^m / \cong$, onde dados $P = (u_1, v_1)$ e $Q = (u_2, v_2)$ dizemos que $P \cong Q \iff u_1 = u_2$ e $v_2 = \phi_{ij}(u_1)v_1$, onde $\phi_{ij} \in GL_m(\mathcal{O}_{U_{ij}})$ são as matrizes obtidas pela trivialidade de $\mathcal{F}$ na cobertura $\mathcal{U}$.

Considere o mapa projeção $\pi : V_X(\mathcal{F}) \longrightarrow X$ e seja $P \in X$. Tome $(p, \sigma_0) \in \pi^{-1}(P)$. Seja U um aberto em torno de P e $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ uma seção tal que $\sigma_P \otimes 1 = \sigma_0$. Encare σ como um mapa $\sigma : U \longrightarrow V_X(\mathcal{F})|_U$ e defina uma família de $\mathbb{C}$-espaços vetorias $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}_Q\}_{Q \in V_X(\mathcal{F})}$ pondo

$$\mathcal{D}_{(P,\sigma_0)} := (d_P\sigma - \nabla_P(\sigma))(T_{X,P})$$

Afirmação 1: $\mathcal{D}$ independe da escolha da seção σ e define uma distribuição m-dimensional em X.

De fato, escolha bases para $T_{X,P}$ e $T_{V(\mathcal{F}),(P,\sigma_0)}$, digamos

$$T_{X,P} = \mathbb{C}\partial_{X_1}|_P \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\partial_{X_n}|_P$$

$$T_{V(\mathcal{F}),(P,\sigma_0)} = \mathbb{C}\partial_{X_1}|_P \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\partial_{X_n}|_P \oplus \mathbb{C}\partial_{Y_1}|_{\sigma_0} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}\partial_{Y_m}|_{\sigma_0}$$

Um cálculo elementar mostra que se definirmos $\psi_P := d_P\sigma - \nabla_P(\sigma)$ então,

$$v_{k,P} := \psi_P(\partial_{X_k}) = \partial_{X_k}|_P - \sum_{i,j}\sigma_{0,j}(P)a^j_{k,i}(P)\partial_{Y_i}|_{\sigma_0}.$$

onde $a^j_{k,i}$ são funções regulares em uma vizinhaça de P tais que

$$\nabla(s_j) = \sum_{k,i} a^k_{i,j}dx_k \otimes s_i.$$

Em particular, $\mathcal{D}_{(P,\sigma_0)}$ idepende da seção σ tal que $\sigma_P \otimes 1 = \sigma_0$. Além disso, não é difícil ver da descrição explícita de ψ, que $\mathcal{D} = \langle v_1, ..., v_n\rangle$ é uma distribuição n-dimensional em $V_X(\mathcal{F})$.

Passo 2 - $\mathcal{D}$ é integrável: Vamos mostrar que $K(\nabla) = 0$ implica que $\mathcal{D}$ é integrável. Para isto, sejam D_1 e D_2 elementos de $\mathcal{D}$. Devemos mostrar que

$$[D_1, D_2]_{(P,\sigma_0)} \in \mathcal{D}_{(P,\sigma_0)}\text{para todo } (P, \sigma_0) \in V(\mathcal{F}).$$

Uma cálculo elementar mostra que para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$ temos

$$[v_i, v_j] = -\sum_{k,l} R^l_{i,j,k}\sigma_k\partial_{y_l} \qquad (*)$$

onde $R^l_{i,j,k}$ são coeficientes determinados pela equação

$$K(\nabla)(s_k) = \nabla_1 \circ \nabla_0(s_k) = \sum_l(\sum_{i<j} R^l_{i,j,k}dx_i \otimes dx_j) \otimes s_l \qquad (**)$$

Em particular, da fórmula (*) e do fato de que v_i envolve termos mônicos em ∂_{x_i} temos que $[v_i, v_j] \in \mathcal{D}$ se e somente se $R^l_{i,j,k} = 0$ para todo i, j, k, l. Agora, pela fórmula (**) vemos que isso é equivalente a condição $K(\nabla) = 0$ que é satisfeita pela hipótese: $(\mathcal{F}, \nabla) \in \mathbf{E.D.A}(X/\mathbb{C})$.

Passo 3 - subvariedades integrais de $\mathcal{D}$ se identificam, em uma vizinhaça da fibra $p \times \mathcal{F}(P)$, com seções planas de $\mathcal{F}^\nabla$:

Seja $\sigma \in \mathcal{F}(U)$ para algum aberto U. Então, $\sigma \in \mathcal{F}^\nabla(U)$ se e somente se o mapa $d\sigma : T_X|_U \longrightarrow T_{V_X(\mathcal{F})}|_U$ se fatora passando pela distribuição $\mathcal{D}|_U \subset T_{V_X(\mathcal{F})}|_U$. De fato, diminuindo se necessário podemos supor $V_X(\mathcal{F})|_U \cong U \times \mathcal{F}(P)$. Nesse caso, σ se corresponde ao mapa

$$\sigma : (x_1, ..., x_n) \mapsto (x_1, ..., x_n, \sigma_1(x), ..., \sigma_m(x)).$$

de modo que $d\sigma(\partial_{X_k}) = \partial_{X_k} + \sum_{i=1}^m \frac{\partial s_i}{\partial_{X_k}}\partial_{Y_i}$. Em particular, vemos que $d\sigma(\partial_{X_k}) \in \mathcal{D}$ se e somente se $d\sigma(\partial_{X_k}) = v_k$. Assim, $d\sigma$ se fatora passando por $\mathcal{D}$ se e somente se para todo k temos

$$\sum_{i=1}^m \frac{\partial s_i}{\partial_{X_k}}\partial_{Y\,i} = -\sum_{i,j}\sigma_j a^j_{k,i}\partial_{Y_i}$$

Agora, a conclusão se segue da seguinte fórmula:

$$\nabla(\sigma) = \nabla(\sum_i \sigma_i s_i) = \sum_{i,k}(\frac{\partial\sigma_k}{\partial_{X_i}} + \sum_j a^k_{i,j}\sigma_j)dx_i \otimes s_k.$$

Agora, seja $P \in X$ e $\sigma_0(P) = \sum_i \sigma_{0,j}(P)s_j(P)$ um elemento da fibra $\mathcal{F}(P)$. Pela condição de integrabilidade em $\mathcal{D}$ sabemos que existe uma subvariedade analítica $V \subset V_X(\mathcal{F})$, em uma vizinhança $\tilde{U}$ de $\sigma_0(P)$, e passando por $\sigma_0(P)$ tal que para todo $Q \in V$ temos $T_Q V = \mathcal{D}_Q$. Diminuindo se necessário, podemos supor que $\tilde{U} = U \times \mathcal{F}(P)$. Agora, considere a projeção $\pi : V \subset \tilde{U} \longrightarrow U$. Pela construção temos que π é um isomorfismo em uma viziança de $\sigma_0(P)$. Com efeito, considerando o mapa diferencial temos que $d_{\sigma_0}\pi$ leva a base $v_{1,P}, ..., v_{n,P}$ na base $\partial_{X_1}, ..., \partial_{X_n}$. Seja s a inversa de π definida em um aberto $U^{'}$. Então, temos

$$s : U^{'} \longrightarrow V|_{U'} \longrightarrow V_X(\mathcal{F})|_{U'}$$

e segue que ds se fatora passando por $\mathcal{D}$.

Em particular, o mapa natural $\mathcal{F}^{\nabla} \longrightarrow \mathcal{F}_P \otimes_{\mathcal{O}_{X,P}} \mathcal{O}_{X,P}/\mathcal{M}_{X,P}$ é sobrejetivo. A injetividade se segue do teorema de unicidade de equações diferenciais, o qual garante que única solução da equação diferencial $\nabla(\sigma) = 0$ satisfazendo $\sigma(P) = \sigma_0$. ■

Demonstração. (da correspondência de Riemann-Hilbert) Pelo lema acima, sabemos que a aplicação $(\mathcal{F}, \nabla) \mapsto \mathcal{F}^{\nabla}$ está bem definida. Vamos contruir o funtor inverso. Para isso, seja $\mathcal{G}$ um sistema local sobre X. Defina $\mathcal{G}_X := \mathcal{G} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X$ feixe que associa $U \mapsto \mathcal{G}(U) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_X(U)$ e seja $\{U_i\}_i$ uma cobertura de X tal que $\mathcal{G}|_{U_i} \cong \mathbb{C}^n$. Fixe i e tome $s_1, \ldots, s_n \in \mathcal{G}(U_i)$ uma base. Dado $\sum_j f_j \otimes s_j \in \mathcal{G}_X(U_i)$ definimos $\nabla_c|_{U_i}$ pondo

$$\nabla_c|_{U_i}(\sum_j f_j \otimes s_j) = \sum_j df_j s_j.$$

Como qualquer outra escolha de base difere por uma matriz com coeficentes constantes e como $df = 0$ para todo $f \in \mathbb{C}$ segue que ∇_c está bem definida e independe de base. O funtor inverso é $\mathcal{G} \mapsto (\mathcal{G}_X, \nabla_c)$.

■

Corolário 7.6. Seja X uma variedade complexa. Então,

$$\mathbf{E.D.A}(X/\mathbb{C}) \cong \mathcal{A}_X(\mathbb{C}) \cong \mathbf{Rep}(\pi_1(X)).$$

8. Variedades sobre k com $char(k) > 0$

8.1. **Caso em que** $char(k) = p > 0$**.** No que se segue k denotará um corpo algebricamente fechado de caracteristica $p > 0$ e X uma variedade sobre k. Denotaremos o morfismo estrutural $X \longrightarrow Spec(k)$ por h.

Definição 16. O mapa **Frobenius absoluto**, denotado por F_X, consiste no morfismo

$$F_X = (id, f) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

que a nivel de espaço topológico é a identidade e a nível de funções é o mapa p-potencia i.e. $f : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ associa $g \mapsto g^p$.

Seja F_k o Frobenius absoluto associado ao esquema $X = Spec(k)$. Considerando os morfismos F_X, h e usando a propriedade universal do produto fibrado obtemos um único mapa $F_{X/k} : X \longrightarrow X^{(p)}$ tal que o diagrama abaixo é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dotted, "F_{X/k}"] \arrow[drr, bend left, "F_X"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& X^{(p)} \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "h"'] \\
& Spec(k) \arrow[r, "F_k"] & Spec(k)
\end{tikzcd}$$

Chamaremos $F_{X/k}$ de mapa **Frobenius relativo**.

Observação. *Suponha que $X = Spec(A)$ para alguma k-álgebra de tipo finito. Seja $A^{(p)} := A \otimes_{F_k} k$ onde $F_k : k \longrightarrow k : a \mapsto a^p$. O diagrama acima pode ser visto como a versão geometrica do seguinte diagrama:*

$$\begin{tikzcd}
A & & \\
& A^{(p)} \arrow[ul, dotted, "F_{X/k}"] & A \arrow[l, "p"'] \arrow[ull, bend right, "F_A"'] \\
& k \arrow[u, "q"] \arrow[uul, bend left, "h"] & k \arrow[l, "F_k"] \arrow[u, "h"']
\end{tikzcd}$$

onde $h : l \mapsto l.1_A$, $p : a \mapsto a \otimes 1$, $q : l \mapsto 1 \otimes l$ e $F_{X/k} : a \otimes l \mapsto la^p$.

Definição 17. Seja $(\mathcal{F}, \nabla)$ uma equação diferencial em X. A p-curvatura de ∇ é por definição o mapa

$$\begin{aligned} \varphi_p : \mathbf{Der}_k(\mathcal{O}_X) &\longrightarrow \mathbf{End}_k(\mathcal{F}) \\ D &\mapsto \psi_\nabla(D)^p - \psi_\nabla(D^p). \end{aligned}$$

Lema 8.1. *(Fórmula de Jacobson) Sejam R uma algebra associativa sobre um corpo k de caracteristica $p > 0$. Sejam $a, b \in R$. Então,*

$$(a+b)^p = a^p + b^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_j(a,b).$$

onde $s_j(a,b)$ são polinomios de Lie.

Demonstração. Seja T um indeterminada comutando com a e b. Temos

$$(Ta+b)^p = T^p a^p + b^p + \sum_{j=1}^{p-1} s_j(a,b) T^j$$

para alguns termos polinomiais $s_j(a,b)$ (não necessariamente comutativo).

Seja D_T o operador diferencial canônico na álgebra $R[T]$. Aplicando D_T na identidade acima temos

$$D_T((Ta+b)^p) = \sum_{j=0}^{p-1} (Ta+b)^j a (Ta+b)^{p-j-1} = \sum_{j=1}^{p-1} j s_j(a,b) T^{j-1}$$

Agora, dado $a \in R$ defina os operadores:

$$l(a) : R \longrightarrow R : b \mapsto ab \qquad r(a) : R \longrightarrow R : b \mapsto ba$$

$$ad(a) : R \longrightarrow R : b \mapsto l(a)b - r(a)b.$$

Note que $l(a)$ e $r(a)$ são operadores com $[l(a), r(a)] = 0$. Agora, note que X e Y são elementos comutando em R então vale

$$(X-Y)(X-Y)^{p-1} = (X-Y)\sum_{j=0}^{p-1}\binom{p-1}{j}(-1)^j X^{p1-j}Y^j = (X-Y)\sum_{j=0}^{p-1} X^{p-1-j}Y^j$$

Em particular,

$$ad(Ta+b)^{p-1} = \sum_{j=0}^{p-1} l(Ta+b)^{p-1-j} r(aT+b)^j$$

e dai obtemos a fórmula: $ad(Ta+b)^{p-1}(a) = \sum_{j=0}^{p-1}(Ta+b)^{p-1-j}a(aT+b)^j = \sum_{j=1}^{p-1} js_j(a,b)T^{j-1}$.

Assim, $s_j(a,b) = (1/j)\mathbf{Coef}(ad(Ta+b)^{p-1}(a), T^{j-1})^3$.

■

Lema 8.2. *(Deligne) Sejam R uma algebra associativa sobre um corpo k de caracteristica $p > 0$, $D, g \in R$. Dado $n \in \mathbb{N}$, defina $g^{(n)} := [D, [D, ..., [D, g]]...]$ n-iterações de $'['g$. Suponha que $[g^{(n)}, g^{(m)}] = 0$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$. Então,*

$$(fD)^p = f^pD^p + f(f^{p-1})^{(p-1)}D.$$

Demonstração. Veja [4][proposition (5.3)]. ■

Proposição 7. *Seja X/k uma variedade sobre k com $char(k) = p > 0$ e tome $(\mathcal{F}, \nabla)$ uma equação diferencial em X. Então,*

(i) φ_p é p-linear i.e. $\varphi_p(D_1 + D_2) = \varphi_p(D_1) + \varphi_p(D_2)$ e $\varphi_p(fD) = f^p\varphi_p(D)$.

(ii) $[\psi_\nabla(D), \psi_\nabla(D^p)] = [\psi_\nabla(D), \varphi_p(D)] = [\psi_\nabla(D^p), \varphi_p(D)] = 0$.

(iii) $[\varphi_p(D), \varphi_p(D_1)] = 0$ para quaisquer $D, D_1 \in \boldsymbol{Der}_k(\mathcal{O}_X)$.

(iv) $[\varphi_p(D), \psi_\nabla(D_1)] = 0$ para quaisquer $D, D_1 \in \boldsymbol{Der}_k(\mathcal{O}_X)$.

Demonstração. (i) Sejam D_1, D_2 derivações. Usando a fórmula de Jacobson, temos que

$$\psi_\nabla((D_1+D_2)^p) = \psi(D_1^p+D_2^p+\sum_{i=1}^{p-1} s_i(D_1, D_2)) = \psi(D_1^p)+\psi(D_2^p)+\sum_{i=1}^{p-1} s_i(\psi(D_1), \psi(D_2))$$

onde usamos o fato de que a conexão $(\mathcal{F}, \nabla)$ é integrável e que s_i é um polinômio de Lie, para garantir a identidade $\psi_\nabla(s_i(D_1, D_2)) = s_i(\psi(D_1), \psi(D_2))$

Agora, mais uma aplicação da fómula de Jacobson resulta

$$\psi_\nabla(D_1 + D_2)^p = (\psi(D_1) + \psi(D_2))^p = \psi(D_1)^p + \psi(D_2)^p + \sum_{i=1}^{p} s_i(\psi(D_1), \psi(D_2))$$

de modo que tomando a diferença obtemos

$$\varphi_p(D_1 + D_2) = \varphi_p(D_1) + \varphi_p(D_2).$$

[3] $\mathbf{Coef}(ad(Ta+b)^{p-1}(a), T^{j-1})$ = coeficiente de $ad(Ta+b)^{p-1}(a)$ que ocorre em T^{j-1}

Agora, seja $f \in \mathcal{O}_X$ e $s \in \mathcal{F}$. Então,

$$(fD)^p = f^p D^p + fD^{p-1}(f^{p-1})D$$

e assim

$$\psi_\nabla((fD)^p) = f^p \psi_\nabla(D^p) + fD^{p-1}(f^{p-1})\psi_\nabla(D)$$

Por outro lado,

$$\psi_\nabla(fD)^p = (f\psi_\nabla(D))^p = f^p\psi_\nabla(D)^p + f(f^{p-1})^{(p-1)}\psi_\nabla(D) = \\ f^p\psi_\nabla(D)^p + fD^{p-1}(f^{p-1})\psi_\nabla(D).$$

Tomando a diferença resulta: $\varphi_p(fD) = f^p\varphi_p(D)$.

Note que se D é uma derivação então D e D^p comutam e daí segue que $\psi_\nabla(D)$ e $\psi_\nabla(D^p)$ comutam, pois ∇ é plana. Em particular,

$$[\varphi_p(D), \psi_\nabla(D)] = [\varphi_p(D), \psi_\nabla(D^p)] = 0$$

o que demonstra (ii).

Agora sejam D e D_1 derivações. Sem perda de generalidade, podemos supor que $X = Spec(A)$, para uma k-álgebra regular A. Tome $s_1, ..., s_n \in \mathcal{O}_X$ tais que $ds_1, ..., ds_n$ formam uma base de $\Omega^1_{X/k}$ como $\mathcal{O}_X$-módulo (note que uma tal base existe já que estamos assumindo X regular). Temos

$$D = \sum_i a_i \partial_{s_i} \quad \text{e} \quad D^{'} = \sum_i b_i \partial_{s_i}$$

para alguns $a_i, b_i \in A$. Aqui, $\{\partial s_1, \cdots, \partial_{s_n}\}$ é a base de $\mathbf{Der}(A)$ dual a base $\{ds_1, \cdots, ds_n\}$.

Agora, vamos provar que

$$[\varphi_p(D), \varphi_p(D^{'})] = [\varphi_p(D), \psi_\nabla(D^{'})] = 0$$

Temos [4],

$$\varphi_p(D) = \sum_i a_i^p \varphi_p(\partial_{s_i}) = \sum_i a_i^p \psi_\nabla(\partial_{s_i})^p$$

$$\varphi_p(D^{'}) = \sum_i b_i^p \psi_\nabla(\partial_{s_i})^p \quad \text{e} \quad \psi_\nabla(D^{'}) = \sum_i b_i \psi_\nabla(\partial_{s_i})$$

Daí,

$$[\varphi_p(D), \varphi_p(D^{'})] = \sum_{i,j} a_i^p b_j^p [\psi_\nabla(\partial_{s_i})^p, \psi_\nabla(\partial_{s_j})^p] = 0$$

$$[\varphi_p(D), \psi_\nabla(D^{'})] = \sum_{i,j} a_i^p b_i [\psi_\nabla(\partial_{s_i})^p, \psi_\nabla(\partial_{s_j})] = 0$$

■

Denotaremos por $\mathbf{E.D}_0(X/k)$ a categoria cujos objetos consistem de equações diferenciais com p-curvatura 0.

Teorema 8.3. *(Cartier) Seja X/k uma varieade sobre corpo k com $char(k) = p > 0$, Seja $X^{(p)}$ a variedade obtida por mudança de base com respeito ao Frobenius absoluto F_k. Então, existe uma equivalencia de cateorias $\boldsymbol{E.D}_0(X/k) \cong \boldsymbol{QSch}(X^{(p)})$.*

[4] relembre que $\partial_{s_i}^p = 0$

Demonstração. (ver [4][Theorem 5.1]) Os funtores são definidos naturalmente. Para cada $(\mathcal{F}, \nabla)$ equação diferencial com p-curvatura 0 definimos $F_*(\mathcal{F}^\nabla)$ o feixe em $X^{(p)}$. Reciprocamente, para cada $\mathcal{G}$ feixe coerente em $X^{(p)}$ definimos a conexão em X pondo $(F^*(\mathcal{G}), \nabla_c)$, onde ∇_c é a conexão canonica i.e. para cada seções locais $f \in \mathcal{O}_X$ e $s \in F^*\mathcal{G}$ temos $\nabla_c(fs) = df \otimes s$. Pode-se mostrar que tais functores são mutalmente quasi-inversos. ■

Definição 18. Seja $(\mathcal{F}, \nabla)$ uma equação diferencial em uma variedade X definida sobre um corpo de número k. Diremos que $\mathcal{F}$ é trivial se é gerado como $\mathcal{O}_X$-módulo por $\mathcal{F}^\nabla$.

Em $char(k) > 0$ existe um critério para trivialidade de $(\mathcal{F}, \nabla)$ que resulta facilmente da equivalência $\mathbf{E.D}_0(X/k) \cong \mathbf{QSch}(X^{(p)})$.

Corolário 8.4. Sejam X/k uma varieadede com $char(k) = p > 0$ e $(\mathcal{F}, \nabla)$ uma equação diferencial em X. São equivalentes:
(i) $\mathcal{F}$ é trivial.
(ii) $\varphi_p = 0$.

8.2. **Invariância da nilpotencia da p-curvatura por mapas etales.** Nessa seção, relambramos generalidades sobre morfismos lisos e etales. Detalhes podem ser encontrados em [8].

Definição 19. Seja $f : X \longrightarrow S$ um morfismo de tipo finito entre esquemas. Diremos que f é liso de dimensão relativa d se
(i) f é liso;
(ii) $\Omega_{X/S}$ é um $\mathcal{O}_X$-módulo localmente livre de posto d.

Definição 20. Seja $g : R \longrightarrow A$ um mapa de aneis. Diremos que f é **etale** se
(ii) $g^* : Spec(A) \longrightarrow Spec(R)$ é liso.
(ii) $\Omega^1_{A/R} = 0$.

Assim, um mapa de anéis $g : R \longrightarrow A$ é etale se é liso de dimensão relativa 0. Um mapa entre esquemas afins $f : Spec(R) \longrightarrow Spec(A)$ será dito etale se o mapa de anéis associado $f^\# : A \longrightarrow R$ é etale.

Definição 21. Sejam f como acima e $P \in X$. Diremos que f é etale em P se existe um aberto afim $U = Spec(A) \ni P$ e $V = Spec(R) \subset S$ com $f(U) \subset V$ tal que o mapa induzido $f^* : Spec(A) \longrightarrow Spec(R)$ é etale.

Diremos que f é etale se é etale em todo ponto $P \in X$.

Proposição 8. *Seja $f : X \longrightarrow S$ um mapa etale. Então,*
(i) f é liso de dimensão relativa 0.
(ii) f é um mapa aberto.

Definição 22. Uma variedade **afim global** é um esquema afim $S = Spec(R)$ de tipo finito sobre $\mathbb{Z}$.

Observação. *Se $S = Spec(R)$ é uma variedade afim global então qualquer ponto fechado $\mathcal{M} \in Spm(R)$ tem característica finita. De fato, se $\mathcal{M}$ é um ponto fechado então temos, em particular, que $\{\mathcal{M}\}$ é um conjunto construtível. Assim, pelo teorema de Chevalley segue que $\{\mathcal{M} \cap \mathbb{Z}\}$ é construtível. Agora, como conjuntos construtíveis em esquemas noetherianos devem conter um aberto denso de seu fecho segue que $\mathcal{M} \cap \mathbb{Z} \neq 0$.*

Mais geralmente, pode-se mostrar que $R/\mathcal{M}$ é um corpo finito.

Proposição 9. *Seja $S = Spec(R)$ uma variedade afim global e $f : X \longrightarrow S$ um mapa liso e seja $h : X^{'} \longrightarrow X$ um mapa etale próprio. Seja $G : (\mathcal{G}, \nabla)$ uma equação diferencial em $X^{'}/S$ e denote a p-curvatura da redução módulo p de G por $\varphi_p(G)$. Então,*

$$\varphi_p(G_p) \text{ é nilpotente se e somente se } \varphi_p(h_* G_p) \text{ é nilpotente}$$

onde G_p denota a redução módulo p da equação diferencial G.

Proposição 10. *Seja $S = Spec(R)$ uma variedade afim global e $f : X \longrightarrow S$ um mapa liso e seja $h : X^{'} \longrightarrow X$ um mapa etale. Seja $E : (\mathcal{F}, \nabla)$ uma equação diferencial em X/S e denote a p-curvatura da redução módulo p de E por $\varphi_p(E)$. Então,*

$$\varphi_p(E_p) \text{ é nilpotente se e somente se } \varphi_p(h^* E_p) \text{ é nilpotente}$$

onde E_p denota a redução módulo p da equação diferencial E, desde que isso faça sentido.

Demonstração. Seja X/k uma variedade lisa sobre um corpo de característica $p > 0$ e tome $E : (\mathcal{G}, \nabla)$ uma equação diferencial em X. Seja $X^{'}$ uma variedade sobre k etale sobre X i.e. existe $h : X^{'} \longrightarrow X$ mapa etale. Devemos mostrar que $\varphi_p(h^* E)$ é nilpotente se e somente se $\varphi_p(E)$ é nilpotente. Associado ao mapa h existe uma sequencia exata de $\mathcal{O}_{X'}$-módulos:

$$h^* \Omega^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{X'/k} \longrightarrow \Omega^1_{X'/X} \longrightarrow 0$$

Agora, como o mapa h é etale temos que
(i) $\Omega^1_{X'/X} = 0$.
(ii) $\delta : h^* \Omega_{X/k} \longrightarrow \Omega_{X'/k}$ é injetivo.
Em particular, segue que $h^* \Omega^1_{X/k} \cong \Omega^1_{X'/k}$. Agora, a p-curvatura $\varphi_p(E) : T_X \longrightarrow End_k(\mathcal{F})$ induz um p-mapa $h^* \varphi_p(E) : h^* T_X \longrightarrow End_k(h^* \mathcal{F})$ e não é difícil ver que $h^* \varphi$ é nilpotente se e somente se φ é nilpotente. Por outro lado, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} T_{X'} \arrow[r, "\varphi_p(h^* E)"] \arrow[d, "\delta'"] & End_k(h^* \mathcal{F}) \arrow[d, "id"] \\ h^* T_X \arrow[r, "h^* \varphi_p(E)"] & End_k(h^* \mathcal{F}) \end{tikzcd}$$

onde o mapa $\delta^{'}$ é o isomorfismo obtido dualizando δ. Daí, segue que $\varphi_p(E_p)$ é nilpotente se e somente se $\varphi_p(h^* E_p)$ é nilpotente.

∎

Proposição 11. *Seja $f : X \longrightarrow S$ um morfismo liso de dimensão relativa d. Então existe abertos $U = Spec(A) \subset X$ e $V = Spec(R) \subset S$ tal que $f(U) \subset V$ e um morfismo etale $\pi : U \longrightarrow \mathbb{A}^d_R$ tal que o seguinte diagrama é comutativo.*

$$\begin{tikzcd} X \supset U \arrow[r, "\pi"'] \arrow[d, "f"] & \mathbb{A}^d_R \arrow[dl] \\ S \supset V & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Localmente f é um mapa entre esquemas afins $f : Spec(A) \longrightarrow Spec(R)$ com $A = R[X_1, ..., X_n]/\langle f_1, ..., f_r\rangle$ tal que a matriz jacobiana $(\partial f_i/\partial X_j)_{1\leq i,j\leq r}$ tem determinante inversível em A. Sejam $s_1, \cdots s_d \in A$ tais que $ds_1, \cdots ds_d$ sejam uma base de $\Omega^1_{A/R}$ como A-módulo. O diagrama acima resulta do digrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & R[X_1, ..., X_n] \arrow[dl, "\pi"] \\ A & \end{tikzcd}$$

onde π^* é o mapa que associa $X_i \mapsto s_i$. Temos que A é uma $R[X_1, ..., X_n]$-algebra lisa de dimensão relativa 0 i.e. A é etale como $R[X_1, ..., X_n]$. ■

9. Pontos singulares regulares

Seja X uma variedade algébrica sobre $\mathbb{C}$ não singular. Denotaremos por X^{an} a variedade complexa associada.

Relembramos as seguintes notações:

E.D.A$(X/\mathbb{C})$ = categoria das equações diferencias analíticas em X^{an}.

E.D$(X/\mathbb{C})$ = categoria das equações diferenciais algébricas sobre X.

$\mathcal{A}_X(\mathbb{C})$ = categoria de sistemas locais de $\mathbb{C}$-módulos de dimensão finita.

Sejam X uma curva completa não singular sobre $\mathbb{C}$ com corpo de funções K e $(\mathcal{F}, \nabla)$ uma equação diferencial algébrica em X. Seja (M, ∇) o módulo diferencial associado, i.e. $M := \mathcal{F}_p$ onde p é o ponto genérico de X com conexão induzida ∇_p (o qual continuaremos a denotar por ∇).

Definição 23. Seja $P \in X(\mathbb{C})$ um ponto racional. Diremos que P é um **ponto singular regular** de $(\mathcal{F}, \nabla)$ se existir um $\mathcal{O}_{X,P}$-módulo livre W_P tal que:
(i) $\mathbf{rank}_{\mathcal{O}_{X,P}} W_P = \dim_K M$.
(ii) $\psi_\nabla(\mathbf{Der}_P(K))(W_P) \subset W_P$.

Aqui, $\mathbf{Der}_P(K)$ consiste de derivações fixando P.

Definição 24. Diremos que $(\mathcal{F}, \nabla)$ possui **monodromia local quasi-unipontente em** P se:
(i) P é singular regular.
(ii) Existe uma base $f = (f_1, \cdots, f_n)$ de W_P tal que $\psi_\nabla(\mathbf{Der}_P(K))(f) = Bf$ onde $B \mod \mathcal{M}_{X,P}$ possui valores característicos $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{Q}$.

Definição 25. Sejam X uma variedade algébrica sobre $\mathbb{C}$ e $E := (\mathcal{F}, \nabla)$ uma equação diferencial algébrica. Diremos que E possui pontos singulares regulares se para qualquer curva completa não singular $C/\mathbb{C}$, $S \subset C$ conjunto finito e $f : C - S \longrightarrow X$ morfismo a restrição $f^*(\mathcal{F}, \nabla)$ possui pontos singulares regulares em S.

Analogamente, diremos que E possui monodromia local quasi-unipontente no infinito se para qualquer curva completa não singular $C/\mathbb{C}$, $S \subset C$ conjunto finito e $f : C - S \longrightarrow X$ morfismo a restrição $f^*(\mathcal{F}, \nabla)$ possui monodromia local quasi-unipontente em S.

No que se segue denotaremos por **E.D.P.S.R**$(X/\mathbb{C})$ a categoria das equações diferenciais algébricas sobre X com **pontos singulares regulares**.

Observação. *Seja* $(\mathcal{F}, \nabla)$ *uma equação diferencial algébrica em* X. *Como objetos algébricos sobre* X *induzem naturalmente objetos analíticos em* $X(\mathbb{C})$ *obtemos uma equação diferencial analítica em* $(\mathcal{F}^{an}, \nabla^{an})$ *em* $X(\mathbb{C})$.

Tal associação é funtorial de modo que obtemos um funtor $F : \boldsymbol{E.D}(X/\mathbb{C}) \longrightarrow \boldsymbol{E.D.A}(X/\mathbb{C}) : (\mathcal{F}, \nabla) \mapsto (\mathcal{F}^{an}, \nabla^{an})$. *Um teorema de Deligne garante que o funtor obtido por restrição* $\boldsymbol{E.D.P.S.R}(X/\mathbb{C}) \longrightarrow \boldsymbol{E.D.A}(X/\mathbb{C})$ *é um isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{E.D.P.S.R}(X/\mathbb{C}) \arrow[r, hook] \arrow[d, "\cong"] & \boldsymbol{E.D}(X/\mathbb{C}) \arrow[dl, "an"] \\ \boldsymbol{E.D.A}(X/\mathbb{C}) & \end{tikzcd}$$

Assim, equações diferenciais algébricas com pontos singulares regulares se correpondem as equações diferenciais analíticas na variedade complexa associada a X.

Exemplo. *Seja* $f \in \mathbb{C}(t)$ *e considere o módulo diferencial* $(\mathbb{C}(t), \nabla)$ *onde* $\nabla : \mathbb{C}(t) \longrightarrow \mathbb{C}(t) \otimes \Omega^1_{\mathbb{C}(t)/\mathbb{C}} : \quad g \mapsto (g' - fg) \otimes dt$. *Sejam* $\alpha_1, ..., \alpha_k$ *os polos de* $f(t)$ *em* $\mathbb{C}$. *Então,*

$$\alpha_i \text{ é um ponto singular regular se e somente se } \quad ord_{\alpha_i}(f(t)) \geqslant -1.$$

De fato, seja $W_{P_i} := \mathbb{C}[t]_{(t-\alpha_i)}$. *Então* $\psi_\nabla(\boldsymbol{Der}_{P_i}(W_{P_i})) \subset W_{P_i}$ *se e somente se* $ord_{\alpha_i}(f) + ord_{\alpha_i}(t - \alpha_i) \geq 0 \Longleftrightarrow ord_{\alpha_i}(f(t)) \geqslant -1$.

9.1. **Influência da p-curvatura.** Seja X uma variedade projetiva sobre $\mathbb{C}$ descrita pelas equações homogêneas $F_1, \cdots, F_r \in \mathbb{C}[X_0, ..., X_n]$ no espaço projetivo $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ e denote por R a $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem nas equações que descrevem X. Desse modo, podemos encarar X como um $Spec(R)$-esquema.

Seja $\mathcal{M} \in Spm(R)$ e $k(\mathcal{M})$ o corpo residual associado. Chamaremos $X_{k(\mathcal{M})}$ de a redução módulo $\mathcal{M}$ da variedade X.

Definição 26. Seja X uma variedade definida sobre um corpo de caracteristica $p > 0$ e denote por P uma "propriedade abstrata" para X (ou sobre algum objeto definido sobre X). Diremos que P **vale para quase todo primo** p, se P é verdadeira para $X_{k(\mathcal{M})}$ para todo ideal maximal contido em um aberto $U \subset Spec(R)$. Diremos que P **vale para uma infinidade de primos** p, se P é verdadeira em $X_{k(\mathcal{M})}$ para todo ideal maximal contido em um conjunto denso $F \subset Spec(R)$.

O objetivo dessa seção é provar o seguinte teorema:

Teorema 9.1. *Sejam* X *uma variedade projetiva lisa sobre* $\mathbb{C}$ *e* $(\mathcal{F}, \nabla)$ *uma equação diferencial algébrica em* X.

(i) Se, para um conjunto infinito de primos p, *as* p*-curvaturas* φ_p *são nilpotentes então* $(\mathcal{F}, \nabla)$ *possui pontos singulares regularaes.*

(ii) Se φ_p *é nilpotente para quase todo primo* p *então* $(\mathcal{F}, \nabla)$ *possui monodromia local quasi-unipontente no infinito.*

Para demonstrar o tal teorema faremos o uso da forma local normal de um ponto singular regular. Mais precisamente,

Teorema 9.2. *Sejam $X/\mathbb{C}$ uma curva completa não singular com corpo de funções K e (M,∇) uma equação diferencial algébrica em X. Sejam $P \in X(\mathbb{C})$, t um parametro uniformizante de P e defina $n := \dim_K M$. Os seguinte são equivalentes:*

(i) P não é um ***ponto singular regular*** *de (M,∇).*

(ii) Para todo $d \in \mathbb{Z}$ com $d \in \langle n \rangle$ existe uma base $f = (f_1, ..., f_n)$ de $M \otimes_K K(u)$ ($u := t^{1/d}$) tal que $\psi_\nabla(u\partial_u)f = Bf$ com $B = u^{-v}B_{-v}$ com $v \in \mathbb{Z}_{>1}$ e $B_{-v} \in \mathcal{M}(\mathcal{O}_{P^1/d})$ possui imagem possui ***não nilpotente*** *quando reduzida módulo $P^{1/d}$.*

Seja S uma variedade afim global e $f : X \longrightarrow S$ um mapa liso de dimensão relativa 1. Seja $(\mathcal{F},\nabla)$ uma equação diferencial em X/S. Sejam P e Q os pontos genéricos de X e S. Defina $K := \mathcal{O}_{X,P}$, $k := \mathcal{O}_{S,Q}$ e denote por $C(k)$ a curva completa não singular associada extensão K/k. Note que a equação diferencial $(\mathcal{F},\nabla)$ induz naturalmente uma equação diferencial na curva C.

Diremos que $(\mathcal{F},\nabla)$ possui pontos singulares regulares se a equação diferencial induzida na curva completa $C(k)$ possui pontos singulares regulares no sentido acima. Considerações análogas para monodromia local quasi-unipotente no infinito.

Teorema 9.3. *Seja $S = Spec(R)$ uma variedade afim global e $f : X \longrightarrow S$ um mapa liso de dimensão relativa 1 e $(\mathcal{F},\nabla)$ uma equação diferencial em X/S.*

(i) Se para quase-todo primo p a p-curvatura de $(\mathcal{F},\nabla) \mod p$ é nilpotente então $(\mathcal{F},\nabla)$ possui monodromia local quasi-unipontente no infinito.

(ii) Se para uma infinidade de primos p a p-curvatura de $(\mathcal{F},\nabla) \mod p$ é nilpotente então $(\mathcal{F},\nabla)$ possui pontos singulares regulares.

Demonstração. Seja K/k o corpo de funções associado a f e denote por $C(k)$ a curva completa não singular correspondente. Seja $P \in C(k)$ um k-ponto com parâmetro uniformizante T e suponha que P é um ponto singular da equação diferencial $(\mathcal{F},\nabla)|_{K/k}$, o qual denotaremos por (M,∇).

Inicialmente note que podemos assumir:
(i) X é um aberto principal $D(g)$ em $\mathbb{A}^1_R = Spec(R[T])$, para algum $g \in R[T]$: De fato, pela proposição 11, sabemos que existe um mapa etale $\pi : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_R$ tal que o $f = c \circ \pi$, onde $c : \mathbb{A}^1_R \longrightarrow S$ é o mapa canônico. Além disso, pela proposição 9 temos que $(\mathcal{F},\nabla)$ possui p-curvatura nilpotente se e somente se $f_*(\mathcal{F},\nabla)$ o possui.
(ii) M é um $R[T]_{g(T)}$-módulo livre: $\mathcal{F}$ é localmente livre. Assim, diminuindo $D(g)$, se necessário, podemos supor que M é livre como $R[T]_{g(T)}$-módulo.
(iii) $g(T) = T^k h(T)$, para algum $h(T) \in R[T]$ e $j > 0$ e $h(0) \in R^*$: De fato, a condição $k > 0$ é equivalente a pedir que (M,∇) possui ponto singular em P ("os denominares envolvem T"). Localizando no sistema multiplicativo $\{h(0)^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, se necessário, podemos supor $h(0) \in R^*$.

Suponha que (M,∇) seja p-nilpotente para um numero infinito de primos p e seja P um ponto singular. Assuma que não é regular. Seja $n := rank_A(M)$, onde definimos $A := R[T]_{g(T)}$. Seja $Z := T^{1/n!}$ e considere a mudança de variáves:

$$R[T]_{g(T)} \longrightarrow R[Z]_{g(Z)} : T \mapsto Z$$

Pela invariancia da p-nilpotencia seque a equação diferencial considerada em $Spec(R[Z]_{g(Z)})$ é p-nilpotente. Assim, pela forma normal de um ponto não singular regular segue que existe uma base $f = (f_1, ..., f_n)$ de M tal que

$$\psi_\nabla(Z\partial_Z)f = Z^\mu(A + ZB)f$$

com $\mu > 0$, $A \in \mathcal{M}_n(R)$ não nilpotente e $B \in \mathcal{M}_n(R[Z]_{h(Z)})$. Agora, para cada $j \in \mathbb{Z}_{>0}$ temos

$$\psi_\nabla(Z\partial_Z)^i f = Z^{-\mu i}(A^i + ZB_i)f \quad \text{com } B_j \in \mathcal{M}_n(R[Z]_{h(Z)})$$

Seja p um primo. Pela hipotése de nilpotencia da p-curvatura segue que existe $a(p) \in \mathbb{N}$ tal que[5]

$$(\psi_\nabla(Z\partial_Z)^p - \psi_\nabla(Z\partial_Z))^{a(p)} \in pM.$$

Equivalentemente,

$$(Z^{\mu p}(A^p - ZB_p) - Z^\mu(A + ZB))^{a(p)} \in pM.$$

Considerando o termo de maior ordem resulta $A^{a(p)p} \in p\mathcal{M}_p(R)$ para todo primo p. Em particular, segue que $A \mod p$ é nilpotente para ideais maximais em um conjunto denso $F \subset Spec(R)$. Em particular, A é nilpotente. Contradição! Assim, P é um ponto singular regular. Pela definição sabemos que existe uma base de M tal que

$$\psi_\nabla(T\partial_T)f = (A + TB)f$$

onde $A \in \mathcal{M}_n(R)$ e $B \in \mathcal{M}_n(R[T]_{h(T)})$. Engordando R, se necessário, podemos assumir que a decomposição de Jordan-Chevalley de A está definida sobre R i.e. temos

$$A = D + N, \qquad [D, N] = 0$$

com $D \in \mathcal{M}_n(R)$ diagonal e $N \in \mathcal{M}_n(R)$ nilpotente. Suponha que (M, ∇) seja p-nilpotente para quase-todo primo p. Então para cada tal primo temos

$$(\psi_\nabla(T\partial_T)^p - \psi_\nabla(T\partial_T))^{a(p)} \in pM.$$

Por outro lado, temos

$$\psi_\nabla(T\partial_T)^j f = (A^j + TB_j)f$$

Comparando o termo constante na espressão $\varphi_p^{a(p)}$ resulta

$$(A^p - A)^{a(p)} \in p\mathcal{M}_n(R)$$

Escrevendo $A = D + N$ obtemos $(A^p - A)^{a(p)} = (D^p - D + N^p - N)^{a(p)} = 0 \mod p$ e considerando os termos na diagonal vem $D^p = D \mod p$, para quase-todo primo p. Daí, D possui coeficientes em $\mathbb{Q}$.

∎

Conjectura (Grothendieck-Katz). *Sejam X uma variedade lisa sobre um corpo de número k e $(\mathcal{F}, \nabla)$ uma equação diferencial em X. Suponha que para quase todo número primo p, a redução módulo p de $(\mathcal{F}, \nabla)$ possui p-curvatura nula. Então, módulo recobrimento etale $\mathcal{F}$ é trivial.*

Parte 5. Campos holomorfos de tipo finito em $(\mathbb{C}^2, 0)$

9.2. **Forma normal de Jordan-Chevalley.** Sejam k um corpo perfeito e V um k-espaço vetorial com $\dim_k V < \infty$.

Relembre que um mapa k-linear $T : V \longrightarrow V$ é dito semi-simples se satisfaz uma das seguintes condições equivalentes:

- Se $m_T(t)$ é o polinômio minimal de T então $m_T(t) \otimes \overline{k}$ é reduzido;
- Se $W \subset V$ é um k-subespaço T-invariante então existe W' um subespaço T-invariante tal que $V = W \oplus W'$;

[5] relembramos que em $\mathbb{F}_p[Z]$ vale a fórmula: $(Z\partial_Z)^p = Z\partial_Z$

- Se $k = \overline{k}$ então T é diagonalizável.

Dizemos que T é nilpotente se existir $nin\mathbb{N}$ tal que $T^n = 0$.

Teorema 9.4. *(cf.[2][section 4.2]) Sejam k um corpo algebricamente fechado e $T \in End_k(V)$. Então, T se escreve, unicamente, como*

$$T = T_S + T_N$$

onde T_S é semi-simples, T_N é nilpotente e $[T_S, T_N] = 0$.

Demonstração. Seja $p_T(t) = \prod_{i=1}^r (t-\alpha_i)^{m_i}$ o polinômio característico de T. Para $i \in \{1, ..., r\}$ defina $V_i := Ker((T - \alpha_i id_V)^{m_i})$ de modo que temos uma decomposição:

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r$$

Note que $T_i := T|_{V_i} \in End_k(V_i)$ possui polinômio característico $p_{T_i}(t) = (t-\alpha_i)^{m_i}$ Agora, relembre o teorema chinês dos restos:

$$k[t]/\prod_{i=1}^r (t-\alpha_i)^{m_i} \cong \prod_{i=1}^r k[t]/(t-\alpha_i)^{m_i}$$

Assim, considerando $(\alpha_1, ..., \alpha_r, 0) \in k[t]/(t-\alpha_1)^{m_1} \times k[t]/(t-\alpha_2)^{m_2} \times \cdots \times k[t]/(t-\alpha_r)^{m_r} \times k[t]/\langle t\rangle$ sabemos que existe $p(t) \in k[t]$ tal que

$$p(t) \equiv \alpha_i \mod (t-\alpha_i)^{m_i} \text{para } i = 1, ..., r \text{ e } p(t) \equiv 0 \mod (t).$$

Seja $q(t) := t - p(t) \in k[t]$ e defina: $T_S := p(T)$ e $T_N := q(T)$. Observe que por construção $[T_S, T_N] = 0$. Vamos mostrar que T_S é semi-simples. Com efeito, pela construção temos que $T_S|_{V_i} = \alpha_i id_{V_i}$ e assim, $T_S = T_S|_{V_1} \oplus \cdots \oplus T_S|_{V_r}$ de modo que T_S possui polinômio minimal $(t-a_1)\cdots(t-a_r)$. Como T_S é diagonalizável temos que $T_N = T - T_S$ é uma matriz nilpotente. Assim, $T = T_S + T_N$ é uma tal decomposição. Provemos agora a unicidade. Seja $T = s + n$ uma decomposição com s semi-simples, n nilpotente e $[s, n] = 0$. Vamos mostrar que $s = T_S$ e $n = T_N$. Considere a diferença $T^{'} := T_S - s$. Temos que $T^{'}$ é semi-simples. De fato, $T^{'}$ soma de dois operadores semi-simples que comutam entre si. Agora, observe que $T^{'}$ é nilpotente: de fato, $T^{'} = T_S - s = T_N - n$ é nilpotente já que T_N e n comutam entre si. Conslusão: $T^{'}$ é nilpotente e semi-simples o que implica $T^{'} = 0$. Assim, $s = T_S$ e $n = T_N$. ■

Observação. *Note que mostramos algo a mais: T se escreve de maneira única como $T_S + T_N$ com T_S diagonalizável, T_N nilpotente, $[T_S, T_N] = 0$* ***e com** T_S**,** T_N* ***polinômios em** T. Em particular, qualquer operador comutando com T comuta com T_S e T_N.*

Vamos aplicar o resultado acima para campos formais. Seja $v = \{v^M\}_{M\in\mathbb{N}}$ um campo formal em $\mathbb{C}^2$ fixando $\langle X, Y\rangle$. Aqui, encaramos um campo formal como uma coleção de derivações $v^M \in Der(\mathcal{O}/\mathcal{M}^{M+1})$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X/\mathcal{M}^{N+1} \arrow[r, "v^{N+1}"] \arrow[d, "\pi_{N+1}"] & \mathcal{O}_X/\mathcal{M}^{N+1} \arrow[d, "\pi_{N+1}"'] \\
\mathcal{O}_X/\mathcal{M}^{N} \arrow[r, "v^N"] & \mathcal{O}_X/\mathcal{M}^{N}
\end{tikzcd}$$

Como $\mathcal{O}/\mathcal{M}^N$ é uma $\mathbb{C}$-espaço de dimensão finita encarando v^N como um $\mathbb{C}$-operador e aplicando o teorema acima obtemos uma decomposição

$$v^M = v_S^M + v_N^M \quad (*)$$

onde v_S^M e v_N^M são as partes semi-simples e nilpotente, respectivamente. Isso determina uma decomposição do campo $v = \{v^M\} = \{v_S^M\} + \{v_N^M\} = v_S + v_N$.

Corolário 9.5. Seja v um derivação de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ fixando $\mathcal{M} := \langle X, Y\rangle$. Então existêm únicos v_S e v_N derivações em $\mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que

$$v = v_S + v_N \qquad [v_S, v_N] = 0 \qquad (*)$$

9.3. **Campos de tipo finito.**

Definição 27. Seja $v = a(X,Y)\partial_X + b(X,Y)\partial_Y$ um campo holomorfo em $\mathbb{C}^2$. Seja $R[v]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra obtida por ajunção de todos os coeficientes que ocorrem nas equações que definem $a(X,Y)$ e $b(X,Y)$. Diremos que v é de tipo finito se $R[v]$ é uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito.

Definição 28. Seja v um campo polinomial definido em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$. Seja R uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito tal que v pode ser vista como uma derivação sobre R (um modelo afim de v). Seja $\mathcal{M} \in Spm(R)$ de caracterítica p. A **p-curvatura** do campo v é definida por

$$D_p(v) := \frac{\overline{v} \wedge \overline{v}^p}{\partial_X \wedge \partial_Y} \in R/\mathcal{M}[X,Y].$$

Diremos que v é **p-fechado** se $D_p(v) = 0$.

Observação. *Seja v um campo holomorfo de tipo finito em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade em 0. Seja v_2 outro campo de tipo finito analiticamente conjugado a v. Relembre que isso quer dizer que existe um isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras $\phi : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X$ tal que o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X \arrow[r, "v"] \arrow[d, "\phi"'] & \mathcal{O}_X \arrow[d, "\phi"] \\
\mathcal{O}_X \arrow[r, "v_2"] & \mathcal{O}_X
\end{tikzcd}$$

Vamos assumir que ϕ esteja definido sobre a R-álgebra de tipo finito associada a v e v_2 de modo que a redução módulo p se comporte bem. Assim, para cada primo de boa redução do diagrama acima se definirmos $\mathcal{O}_X \otimes \mathbb{F}_p := \mathbb{F}_p[[X,Y]]$ então obtemos outro diagrama:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X \otimes \mathbb{F}_p \arrow[r, "\overline{v}"] \arrow[d, "\overline{\phi}"'] & \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{F}_p \arrow[d, "\overline{\phi}"] \\
\mathcal{O}_X \otimes \mathbb{F}_p \arrow[r, "\overline{v_2}"] & \mathcal{O}_X \otimes \mathbb{F}_p
\end{tikzcd}$$

Temos $D_p(v) = 0$ se e somente se $D_p(v_2) = 0$.

Lema 9.6. *Seja $v = a(X,Y)\partial_X + b(X,Y)\partial_Y$ um campo formal com singularidade em 0. Sejam $v = v_L + v_N$ sua forma normal e $M \in \mathbb{N}$. Então, existe $p_0(M) \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer primo $p > p_0(M)$, temos que*

$$\overline{v}^M = \overline{v_L}^M + \overline{v_N}^M \mod p$$

é a decomposição de Jordan-Chevalley de v reduzido módulo p em $R_M \otimes \mathbb{F}_p$, onde $R_M := \mathcal{O}_X/\langle X, Y\rangle^{M+1}$

Demonstração. Considere a expressão

$$v^M = v_L^M + v_N^M$$

sobre $\mathcal{O}_X/\langle X, Y\rangle^{M+1}$. Seja p um primo de boa redução e observe que:
(i) $[\overline{v_L}^M, \overline{v_N}^M] = 0$.
(ii) $\overline{v_N^M}$ é nilpotente.
Assim, pela unicidade da decomposição de Jordan-Chevalley, é suficiente mostrar que v_S é um operador semi-simples $\mod p$. Agora, sabemos que v_S é semi-simples se e somente se seu polinômio minimal é reduzido. Por sua vez isso ocorre se e somente se o discriminante do polinômio minimal é não nulo. Assim, esquivando um número finito de primos p garantimos que o discriminante do polinomio minimal reduzido $\mod p$ é reduzido. ∎

Exemplo. *Suponha que v é linear e não degenerado. Módulo multiplicação por unidade, o campo se escreve como:*

$$v = X\partial_X + \alpha Y\partial_Y$$

com $\alpha \in \mathbb{C}^*$. Seja p um primo de boa redução i.e. $p = char(\mathcal{M})$ para algum $\mathcal{M} \in Spm(R[\alpha])$. É bem conchecido que $\alpha \in \mathbb{Q}$ se e somente se $\alpha \mod p \in \mathbb{F}_p$ para quase todo primo p. Note que $\overline{v}$ é p-fechado se e somente se $\alpha \in \mathbb{F}_p$. Em particular, v é p-fechado para quasi-todo primo p se e somente $\alpha \in \mathbb{Q}$.

O exemplo acima é caso particular do seguinte (compare com teorema de Katz)

Teorema 9.7. *Seja v um campo em $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ com singularidade isolada em 0 e com valor característico α. Suponha que v admite um modelo afim i.e. existe R uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito tal que v pode ser encarado como uma derivação sobre R.*

$$\text{Se } D_p(v) = 0 \text{ para quasi-todo primo } p \text{ então } \alpha \in \mathbb{Q}$$

Além disso, v é formalmente linearizável.

Demonstração. Vamos usar a decomposição de Jordan-Chevalley. Podemos escrever

$$v = v_L + v_N \in Der(\mathbb{C}[[X, Y]])$$

com $v_L = X\partial_X + \alpha Y\partial_Y$. Sabemos que a decoposição acima é obtida por passagem ao limite da decomposição de Jordan-Chevalley obtida em cada jato:

$$v^M = v_L^M + v_N^M : \mathcal{O}_X/\mathcal{M}^{M+1} \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{M}^{M+1}.$$

Fixe $M \in \mathbb{N}$. Sabemos que existe $p_0(N)$ tal que para qualquer primo $p > p_0(N)$

$$\overline{v^M} = \overline{v_L^M} + \overline{v_N^M} : \mathcal{O}_X/\mathcal{M}^{M+1} \otimes \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathcal{O}_X/\mathcal{M}^{M+1} \otimes \mathbb{F}_p$$

é a decoposição de Jordan-Chevalley do operador $\overline{v^M}$ obtido por redução $\mod p$. Vamos mostrar agora que v_L é paralelo à v_N sobre $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Para isso, fixe M e tome p grande o suficente tal que $(v_N^M)^p = 0$. Temos, $v = v_L + v_N$ e $v^p = v_L^p + v_N^p$ sobre $\mathcal{O}_X/\mathcal{M}^{M+1} \otimes \mathbb{F}_p$ e dai:

$$0 = v^N \wedge (v^N)^p = (v_L)^N \wedge (v_L^N)^p + v_N^N \wedge (v_L^N)^p$$

Usando o fato que 0 é não degenerado e que, assim, $v_N^M \wedge v_L^p$ envolve termos de ordem > 2 obtemos

$$(v_L)^N \wedge (v_L^N)^p = (v_N)^M \wedge (v_L^M)^p = 0$$

para todo p. Daí, segue que $\alpha \mod p \in \mathbb{F}_p$ para quasi-todo primo p e por conseguinte $\alpha \in \mathbb{Q}$. Por outro lado, concluimos também que $(v_N)^M \wedge v_L^M = 0 \mod p$ para todo primo $p > p_0(M)$. Em particular, $(v_N)^M \wedge (v_L^M)^p = 0$ em $\mathcal{O}_X/\mathcal{M}^{M+1}$. Por passagem ao limite vem: $v_N \wedge v_L = 0 \Longrightarrow v = (1 + g(X,Y))v_L$, para algum $g \in \hat{\mathcal{O}_X}$. ∎

Proposição 12. *Seja v uma derivação em um dominio de tipo finito A sobre corpo k com $char(k) = p > 0$. Então, v admite integral primeira não trivial se e somente se $D_p(v) = 0$.*

Demonstração. Se segue da correspondência em [6][1.9 proposition]. ∎

A proposição acima sugere um principio local-global para existência de integral primeira. Consideremos um caso bem particular:

Proposição 13. *Seja v um campo holomorfo de tipo finito. Suponha que exista um conjunto infinito $S \subset Spec(\mathbb{Z})$ tal que $v \mod p$ possui integral primeira $f_p \in \mathbb{F}_p[X,Y]$ para todo primo $p \in S$. Além disso, suponha que $deg(f_p) \leq d$, para algum $d \in \mathbb{Z}$ independente de p. Então existe uma integral primeira polinomial para v em $\mathbb{Q}[X,Y]$.*

Demonstração. Com efeito, suponha que para todo primo $p \in S$ exista integral primeira $f_p \in \mathbb{F}_p[X,Y]$ de grau $\leq d$. Seja $F_p \in \mathbb{Q}[X,Y]$ um levantamento de f_p de grau no máximo d em $\mathbb{Q}$. Então, temos $v(F_p) = pG_p$ para algum G_p de grau no máximo $deg(v) + d$. Assim, a coleção $\{G_p\}_{p\in S}$ pode ser vista como um suconjunto do $\mathbb{Q}$-espaço vetorial $\mathbb{Q}[X,Y]_{\leq deg(v)+d}$ de polinômios de grau no máximo $deg(v)+d$. Em particular, existem primos $p_1, ..., p_k$ e $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Q}$, nem todos nulos, tais que

$$a_1 G_{p_1} + \cdots + a_k G_{p_k} = 0$$

Defina $F := \sum_i \frac{a_i}{p_i} F_{p_i}$. Então,

$$v(\sum_i \frac{a_i}{p_i} F_{p_i}) = \sum_i \frac{a_i}{p_i} v(F_{p_i}) = \sum_i \frac{a_i}{p_i} p_i G_{p_i} = 0$$

Para concluir a prova resta mostrar que $\sum_i \frac{a_i}{p_i} F_{p_i} \neq 0$. Não mostraremos isso, mas seguiremos outro caminho.

Seja $X_d(\mathbb{C}) := \{f \mid f$ é uma integral primeira de grau $\leq d$ de $v\}$. Note que $X_d(\mathbb{C})$ é uma variedade afim em $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^N$ para algum $N \in \mathbb{N}$. Afirmamos que $X_d(\mathbb{C}) \neq \emptyset$. De fato, isso se segue do teorema dos zeros. Se $X_d(\mathbb{C}) = \emptyset$ e $g_1, ..., g_M$ são as equações que descrevem tal variedade então existe uma relação do tipo

$$1 = a_1 g_1 + \cdots + a_M g_M \quad (*)$$

Por hipótese, para uma infinidade de primos p temos que $\overline{X_d}(\mathbb{F}_p) \neq \emptyset$. Em particular, escolhendo um primo conveniente e reduzindo a identidade $(*)$ modulo p obtemos uma contradição $\overline{1} = 0$. Em particular, o campo v admite uma integral primeira polinomial de grau d sobre $\mathbb{C}$.

Isso demonstra que v admite uma integral primeira polinômial sobre $\mathbb{C}$. Agora, um argumento do tipo Galois e especialização permite construir uma integral primeira definina sobre $K := Frac(R)$, onde R é a $\mathbb{Z}$-álgebra de definição de v.

■

Observação. *Seja $v \in Der_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[X,Y])$ uma derivação e p um primo racional. Denote por v_p a redução módulo p do campo v. É possível que v não admita curva aglébrica invariante definida sobre $\mathbb{C}$ mas que v_p possui curva invariante para quasi-todo primo p. De fato, em [7] é demonstrado que qualquer campo em $\mathbb{A}^2_k$ com $deg(v) < p$ possui curva algébrica invariante. Por outro lado, é bem conhecido (cf.[3]) que o campo de Jouanolou*

$$v_d = (1 - XY^d)\partial_X + (X^d + Y^{d+1})\partial_Y$$

*não admite uma curva algébrica invariante. Em particular, uma afirmação do tipo **existe curva algebrica invariante sobre** $\mathbb{C}$ **se e somente se existe curva algébrica sobre** $\overline{\mathbb{F}_p}$ **para quasi-todo primo** p é falsa.*

10. Integrais primeiras holomorfas: um critério aritmético

O objetivo dessa seção consiste em provar um critério aritmético para existência de integrais primeiras holomorfas em folheções sobre superfícies algébricas. Inicialmente trateremos o caso local.

Definição 29. Seja v um campo holomorfo em $\mathbb{C}^2$ com única singularidade em 0. Suponha que v admite um modelo afim sobre uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito R. A **função arimética associada a** v é a aplicação:

$$\mu_v : \mathbf{Spm}(R) \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \qquad \mathcal{M} \mapsto ord_0(D_q(v))$$

onde $q := char(R/\mathcal{M})$.

Proposição 14. *$\mu_v(Q) \geq \delta_v(Q)$ para todo Q, onde $\delta_v(Q) := (q+1)l(0) - q$.* [6].

Demonstração. De fato, escreva $v = v_{l(0)} + v_{l(0)+1} + \cdots$ e note que

$$v^p = v_{(q+1)l(0)-q} + \cdots$$

com $v_{(q+1)l(0)-q}$ possivelmente nulo. Daí, vem $\mu_v(Q) \geq (q+1)l(0) - q$. ■

10.1. p-curvatura e existência de integrais primeiras holomorfas.

Proposição 15. *Seja v um campo holomorfo de tipo finito em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com singularidade isolada em 0. Suponha que 0 não é degenerado com valor característico -1. Então, v **não** admite uma integral primeira holomorfa em torno de 0 se e somente se μ_v é limitada.*

Lema 10.1. *Seja v um campo holomorfo em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com parte linear $Dv = aX\partial_X - b\partial_Y$, com $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos. Seja $m \in \mathbb{N}$ e defina*

$$\mathcal{D}_m := \mathbb{C}\text{-}espaço\ dos\ polinômios\ de\ grau \leq m\ .$$

Seja $A = diag(a, -b)$ a matrix associada a parte linear de v em 0 e defina

$$L_A^{(m)} : \mathcal{D}_m^{(2)} \longrightarrow \mathcal{D}_m^{(2)} : P_m \mapsto JP_m A\tilde{X} - AP_m\tilde{X}$$

Suponha que $L_A^{(m)}$ seja um isomorfismo. Então, $L^{(m)}_{A\otimes\overline{\mathbb{F}_p}}$ é $\overline{\mathbb{F}_p}$-isomorfismo para todo primo p tal que $m < [\frac{p-|ab|}{|a-b|+|ab|}]$.

---

[6] $l(0) := inf\{n \in \mathbb{N} \mid v \in \langle X, Y\rangle^n\}$

Demonstração. Seja $X^{m_1}Y^{m_2}$ um monômio com $m_1 + m_2 \leq m$. Não é difícil verificar que vale as seguintes fórmulas:

$$L_A^{(m)}(X^{m_1}Y^{m_2}e_1) = (am_1 - bm_2 - a)X^{m_1}Y^{m_2}e_1$$

$$L_A^{(m)}(X^{m_1}Y^{m_2}e_2) = (am_1 - bm_2 + b)X^{m_1}Y^{m_2}e_2.$$

Como estamos assumindo $L_A^{(m)}$ um isomorfismo temos que para qualquer par $(m_1, m_2) \in \mathbb{N}^2$ com $m_1 + m_2 \leq m$ é tal que $(am_1 - bm_2 - a)(am_1 - bm_2 + b) \neq 0$.

Assim, devemos verificiar condições entre m e p que garantem $m_1 - m_2 - 1 \notin \langle p \rangle$ e $m_1 - m_2 + 1 \notin \langle p \rangle$ restrita a condição $m_1 + m_2 = m$. Agora, temos que $|am_1 - bm_2 - a| = |am - am_2 - bm_2| + a = a(m+1) + |a-b|m_2 \leq a(m+1) + |a-b|m \leq m(ab + |a-b|) + ab$. O mesmo argumento aplicado a $|am_1 - bm_2 + b|$ implica $|am_1 - bm_2 + b| \leq m(ab + |a-b|) + ab$. Em particular, se $p > ab + m(ab + |a-b|)$ i.e. se $m < \frac{p-ab}{ab+|a-b|}$ concluímos que $L^{(m)}_{\overline{A \otimes \mathbb{F}_p}}$ é um isomorfismo, como queríamos demonstrar. ∎

Observação. *Seja v um campo analítico com singularidade em 0 não degenerada e parte linear $Dv(0) = diag[a, -b]$. Usando o mapa descrito acima podemos mostrar (teorema de Poincaré-Dulac) que existe um campo formalmente conjugado a v no seguinte tipo*

$$v = v_1 + v_N$$

onde $v_1 = aX\partial_X - bY\partial_Y$ e com v_N envolvendo somente termos ressoantes. O argumento consiste em inverter os monômios não ressoantes que ocorrem em v. Tal processo pode ser encarado como um algoritmo para forma normal de Jordan-Chevalley de v.

Lema 10.2. *Seja v um campo holomorfo com parte linear $Dv = aX\partial_X - bY\partial_Y$, para $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ inteiros coprimos. Suponha que v esteja na sua forma normal i.e. $v = v_1 + v_N$ com $v_1 = aX\partial_X - bY\partial_Y$ e $v_N = a(X,Y)\partial_X + b(X,Y)\partial_Y$ envolvendo somente termos ressonantes. Seja $f \in \mathcal{O}_X$ uma integral primeira holomorfa para v definida em torno de 0. Então, existe $g(T) = a_1T + \cdots \in \mathbb{C}\{T\}$ tal que $f(X,Y) = g(X^bY^a)$.*

Demonstração. Temos

$$a(X,Y) = \sum_{ai-bj=a} a_{i,j}X^iY^j = \sum_k a_{i(k),j(k)}X(X^bY^a)^k = X(\sum_k a_{i(k),j(k)}(X^bY^a)^k).$$

$$b(X,Y) = \sum_{ai-bj=-b} b_{i,j}X^iY^j = \sum_k b_{i(k),j(k)}Y(X^aY^b)^k = Y(\sum_k b_{i(k),j(k)}(X^aY^b)^k).$$

Assim, temos que $v = v_1 + Xh_1(X^aY^b)\partial_X + Yh_2(X^aY^b)\partial_Y$, para $h_1(T), h_2(T) \in \mathbb{C}\{T\}$

Agora, seja $f(X,Y) \in \mathbb{C}\{X,Y\}$ uma integral primeira holomorfa em 0 para v e escreva $f = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots$ onde f_d é um polinômio homogêneo de grau d. Observe que $v = v_1 + v_{(a+b)+1} + v_{2(a+b)+1} + \cdots + v_{k(a+b)+1} + \cdots$.

Considerando a igualdade $v(f) = 0$ e comparando os termos de cada grau, obtemos:

(i) **termos de grau** 1: $v_1(f_1) = 0$. Escrevendo $f = AX + BY$ para $A, B \in \mathbb{C}$ resulta $A = B = 0$.

(ii) **termos de grau** $d < a+b$**:** Afirmamos que $f_d = 0$ nesse caso. Com efeito, a condição $d < a+b$ implica que $v_1(f_d) = 0$. Agora, escrevendo $f_d = \sum_{i+j=d} r_{i,j} X^i Y^j$ e considerando a identidade $v_1(f_d) = 0$ obtemos $\sum_{i+j=d} r_{i,j}(ia - bj)X^i Y^j = 0$ e daí resulta $i = bk$ e $j = ak$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Agora, como $i + j = d$ obtemos $k(a+b) = d < a+b$, absurdo a menos que $f_d \equiv 0$.

(iii) **termos de grau** $d = a+b$**:** $v_1(f_{a+b}) = 0$. O mesmo argumento usado em (ii) mostra que $f_{a+b} = \sum_k r_k (X^a Y^b)^k$ com $k(a+b) = d$.

Em geral, não é difícil verificar que $f_{k(a+b)+j} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, ..., a+b-1\}$. Além disso, todo termo do tipo $f_{l(a+b)}$ é da forma $h_{l(a+b)}(X^b Y^a)$, para algum $h_{l(a+b)} \in \mathbb{C}[T]$. Em particular, $f = h(X^b Y^a)$ para algum $h \in \mathbb{C}[[T]]$.

■

Demonstração. (da proposição) Seja v um campo holomorfo de tipo finito como no enunciado. Podemos supor que v está na sua forma normal $v = v_L + v_N$. Sabemos que $v_N = h_1(XY)X\partial_X + h_2(XY)Y\partial_Y$ para alguns $h_1 = \sum_i a_i T^i, h_2 = \sum_i b_i T^i \in \mathbb{C}[[T]]$. Agora, pelo lema acima sabemos que v admite intergal primeira formal se e somente se $a_i = -b_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Por outro lado, seja p um primo de boa redução de v. Então, obtemos um campo $\overline{v}$ sobre $\overline{\mathbb{F}_p}$. Seja $(\overline{v})_1 + (\overline{v})_N$ sua forma normal. Pelo lema 10.1 sabemos que se escrevermos $v = v_1 + v_2 + \cdots + v_{h(p)} + v_{h(p)+1} + \cdots$ então

$$(\overline{v})_1 + (\overline{v})_N = \overline{v_1} + \cdots + \overline{v_{h(p)-1}} + \overline{v_{h(p)}} + \overline{v}_{h(p)+1} + \cdots$$

onde $h(p) = p - 1$. Suponha que v admite uma integral primeira holmorfa. Então, pela observação acima temos $a_i = -b_i$ para todo i e assim $v_k = S_k(X,Y)v_1$ para todo k e algum $S_k \in \mathbb{C}[X,Y]$. Agora, analisando a redução módulo p obtemos $(\overline{v})_1 + (\overline{v})_N = (\overline{S}_1 + \cdots + \overline{S_{h(p)}})v_1 + \overline{v}_{h(p)+1} + \cdots$

Daí, $\mu_v(p) \geq h(p) + 1 + 1 = p + 1$. Em particular, μ_v é não limitada.

Agora, suponha que v não admite uma integral primeira formal. Então, pelo lema anterior isso equivale a dizer que existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $a_i \neq -b_i$. Tome i o menor indice com tal propriedade. Então, uma análise análoga mostrar que a forma normal de $\overline{v}$ tem o seguinte tipo

$$\overline{A(X,Y)}\overline{v_1} + \overline{v_i} + \overline{v_{i+1}} \cdots$$

com $\overline{v_i} \wedge \overline{v_1} \neq 0$ e $\overline{A(X,Y)} \in \overline{\mathbb{F}_p}$. Considerando a p-curvatura de v vemos que $\mu_v(p) = ord_0(v_1 \wedge v_i)$ e assim independe de primo p. Em particular, μ_v é uma função limitada.

■

Observação. *Usamos acima o fato de que para garantir a existência de integral primeira holomorfa em torno de* 0 *do campo* v *é suficiente tratar o caso formal (cf.* [5]*).*

A proposição acima se generaliza:

Teorema 10.3. *Seja* v *um campo holomorfo com singularidade não degenerada e irredutível em* 0 *com valor característico* $\alpha \in \mathbb{Q}_{<0}$*. Então,* v *não admite uma integral primeira holomorfa se e somente se* μ_v *é uma função limitada.*

Demonstração. O argumento é similar ao caso anterior. O ponto crucial consiste na cota fornecida pelo lema 10.1.

■

Referências

1. Werner Balser, *Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2000.
2. James E. Humphreys, *Introduction to Lie algebras and representation theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 9, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1978, Second printing, revised.
3. J. P. Jouanolou, *Équations de Pfaff algébriques*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 708, Springer, Berlin, 1979.
4. Nicholas M Katz, *Nilpotent connections and the monodromy theorem: Applications of a result of turrittin*, Publications mathématiques de l'IHES **39** (1970), 175–232.
5. Jean-François Mattei and Robert Moussu, *Intégrales premières d'une forme de pfaff analytique*, Annales de l'institut Fourier, vol. 28, 1978, pp. 229–237.
6. Yoichi Miyaoka and Thomas Peternell, *Geometry of higher-dimensional algebraic varieties*, DMV Seminar, vol. 26, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
7. J. Pereira, *Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields*, Journal of Pure and Applied Algebra **171** (2002), no. 2-3, 295–301.
8. The Stacks Project Authors, *Stacks Project*, `https://stacks.math.columbia.edu`, 2018.
9. Tamás Szamuely, *Galois groups and fundamental groups*, vol. 117, Cambridge University Press, 2009.
10. Marius van der Put, *Reduction modulo p of differential equations*, Indagationes mathematicae **7** (1996), no. 3, 367–387.