Folheações e redução módulo p

Wodson Mendson

Student algebraic geometry seminar - IMPA

19 de fevereiro de 2021

Equações diferenciais holomorfas

Sejam U um aberto de $\mathbb{C}$ e $a_1, ..., a_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$.

Equações diferenciais holomorfas

Sejam U um aberto de $\mathbb{C}$ e $a_1, ..., a_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$.

Definição

Uma equação diferencial complexa de ordem n sobre U consiste em uma expressão do tipo

$$E[y] : y^{[n]} + a_n y^{[n-1]} + \cdots + a_1 y = 0$$

onde $y^{[j]} := \frac{d^j}{d^j z}$. Uma solução para a equação é uma função holomorfa $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $E[f] \equiv 0$.

Equações diferenciais holomorfas

Sejam U um aberto de $\mathbb{C}$ e $a_1, ..., a_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$.

Definição

Uma equação diferencial complexa de ordem n sobre U consiste em uma expressão do tipo

$$E[y] : y^{[n]} + a_n y^{[n-1]} + \cdots + a_1 y = 0$$

onde $y^{[j]} := \frac{d^j}{d^j z}$. Uma solução para a equação é uma função holomorfa $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ tal que $E[f] \equiv 0$.

Exemplo

$$y^{[1]} = (\frac{1}{z^2+1})y$$

em $U = \mathbb{C} - \{i, -i\}$.

Sistema homogêneo diferencial

Definindo $Y_j = y^{[j-1]}$ para $j = 1, ..., n$, resulta um sistema linear homogêneo diferencial $Y^{'} = A(z)Y$ onde $Y = [Y_1, \cdots, Y_n]^t$ e

Sistema homogêneo diferencial

Definindo $Y_j = y^{[j-1]}$ para $j = 1, ..., n$, resulta um sistema linear homogêneo diferencial $Y^{'} = A(z)Y$ onde $Y = [Y_1, \cdots, Y_n]^t$ e

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1(z) & -a_2(z) & -a_3(z) & \cdots & -a_{n-1}(z) & -a_n(z) \end{pmatrix}$$

Sistema homogêneo diferencial

Definindo $Y_j = y^{[j-1]}$ para $j = 1, ..., n$, resulta um sistema linear homogêneo diferencial $Y' = A(z)Y$ onde $Y = [Y_1, \cdots, Y_n]^t$ e

$$A(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ . & . & . & \cdots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -a_1(z) & -a_2(z) & -a_3(z) & \cdots & -a_{n-1}(z) & -a_n(z) \end{pmatrix}$$

Proposição

O mapa $y \mapsto Y$ estabelece uma bijeção entre o $\mathbb{C}$-espaço vetorial das soluções em U da equação diferencial $E[y]$ com o $\mathbb{C}$-espaço vetorial de soluções em U do sistema diferencial homogêneo linear $Y' = A(z)Y$.

impa

Teorema fundamental

Teorema

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo e $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$. Considere o sistema diferencial $D_A : Y' = A(z)Y$ e fixe $z_0 \in U$ e $Y_0 \in \mathbb{C}^n$. Então, existe única solução $F = (f_1(z), ..., f_n(z))^t$ com $f_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ tal que $F(z_0) = Y_0$.

Teorema fundamental

Teorema

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo e $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$. Considere o sistema diferencial $D_A : Y^{'} = A(z)Y$ e fixe $z_0 \in U$ e $Y_0 \in \mathbb{C}^n$. Então, existe única solução $F = (f_1(z), ..., f_n(z))^t$ com $f_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ tal que $F(z_0) = Y_0$.

Nas condições acima, existe uma matriz de soluções

$$X(z) = [X_1(z), \cdots, X_n(z)]$$

tal que

- $X_i(z)$ são soluções do sistema D_A para todo i.

Teorema fundamental

Teorema

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo e $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$. Considere o sistema diferencial $D_A : Y' = A(z)Y$ e fixe $z_0 \in U$ e $Y_0 \in \mathbb{C}^n$. Então, existe única solução $F = (f_1(z), ..., f_n(z))^t$ com $f_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ tal que $F(z_0) = Y_0$.

Nas condições acima, existe uma matriz de soluções

$$X(z) = [X_1(z), \cdots, X_n(z)]$$

tal que

- $X_i(z)$ são soluções do sistema D_A para todo i.
- $X(z) \in GL_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$.

Teorema fundamental

Teorema

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo e $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$. Considere o sistema diferencial $D_A : Y^{'} = A(z)Y$ e fixe $z_0 \in U$ e $Y_0 \in \mathbb{C}^n$. Então, existe única solução $F = (f_1(z), ..., f_n(z))^t$ com $f_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ tal que $F(z_0) = Y_0$.

Nas condições acima, existe uma matriz de soluções

$$X(z) = [X_1(z), \cdots, X_n(z)]$$

tal que

- $X_i(z)$ são soluções do sistema D_A para todo i.
- $X(z) \in GL_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$.
- Toda solução $S(z)$ de D_A se escreve como $S(z) = X(z)S(z_0)$

Teorema fundamental

Teorema

Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um aberto simplesmente conexo e $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$. Considere o sistema diferencial $D_A : Y^{'} = A(z)Y$ e fixe $z_0 \in U$ e $Y_0 \in \mathbb{C}^n$. Então, existe única solução $F = (f_1(z), ..., f_n(z))^t$ com $f_i \in \mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U)$ tal que $F(z_0) = Y_0$.

Nas condições acima, existe uma matriz de soluções

$$X(z) = [X_1(z), \cdots, X_n(z)]$$

tal que

- $X_i(z)$ são soluções do sistema D_A para todo i.
- $X(z) \in GL_n(\mathcal{O}_{\mathbb{C}}(U))$.
- Toda solução $S(z)$ de D_A se escreve como $S(z) = X(z)S(z_0)$

Problema I. $X(z)$ é algébrica sobre $\overline{\mathbb{Q}}(z)$?

Redução módulo p

Fixemos agora $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}(z))$ matriz com coeficientes racionais e considere o sistema diferencial $D_A : Y^{'} = A(z)Y$.

Redução módulo p

Fixemos agora $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}(z))$ matriz com coeficientes racionais e considere o sistema diferencial $D_A : Y' = A(z)Y$.

Definição

Seja $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ primo. Dizemos que o sistema diferencial D_A admite boa redução sobre p se existir $B(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_{(p)}(z))$ tal que $B(z) \otimes \mathbb{Q} = A(z)$.

Redução módulo p

Fixemos agora $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Q}(z))$ matriz com coeficientes racionais e considere o sistema diferencial $D_A : Y' = A(z)Y$.

Definição

Seja $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ primo. Dizemos que o sistema diferencial D_A admite boa redução sobre p se existir $B(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_{(p)}(z))$ tal que $B(z) \otimes \mathbb{Q} = A(z)$.

Definição (Cartier-van der Put)

A n-ésima do sistema diferencial D_A é definida recursivamente pondo:

- $A_0(z) = I_n$.
- $A_{n+1}(z) = A_n'(z) + A_n(z)A(z)$.

Redução módulo p

Seja p um primo de boa redução para o sistema diferencial D_A.

Redução módulo p

Seja p um primo de boa redução para o sistema diferencial D_A.

Definição

A redução módulo p do sistema D_A consiste no sistema diferencial obtido sobre $\mathbb{F}_p(z)$ reduzindo todos os coeficientes que ocorrem em $A(z)$ módulo p.

Redução módulo p

Seja p um primo de boa redução para o sistema diferencial D_A.

Definição

A redução módulo p do sistema D_A consiste no sistema diferencial obtido sobre $\mathbb{F}_p(z)$ reduzindo todos os coeficientes que ocorrem em $A(z)$ módulo p.

Em *char* > 0 existe um critério essencialmente simples para checar quando um sistema diferencial $D_A : Y' = A(z)Y$ admite uma base de soluções.

Redução módulo p

Seja p um primo de boa redução para o sistema diferencial D_A.

Definição

A redução módulo p do sistema D_A consiste no sistema diferencial obtido sobre $\mathbb{F}_p(z)$ reduzindo todos os coeficientes que ocorrem em $A(z)$ módulo p.

Em *char* > 0 existe um critério essencialmente simples para checar quando um sistema diferencial $D_A : Y^{'} = A(z)Y$ admite uma base de soluções.

Teorema (Cartier-van der Put)

Seja $A(z) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{F}_p(z))$. Os seguintes são equivalentes:

- *D_A admite uma base de soluções algébricas sobre $\mathbb{F}_p(z)$.*
- *D_A admite uma base de soluções em $\mathbb{F}_p(z)$.*
- *D_A admite uma base de soluções em $\mathbb{F}_p((z))$.*
- $A_p(z) = 0$

Redução módulo p e algebricidade

No caso do sistema diferencial $E : y^{[1]} = a(z)y$ sobre $\mathbb{F}_p(z)$ temos uma fórmula explicita para a p-curvatura. De fato, é possível mostrar que

$$A_p(z) = A^{[p-1]}(z) + A(z)^p$$

Redução módulo p e algebricidade

No caso do sistema diferencial $E : y^{[1]} = a(z)y$ sobre $\mathbb{F}_p(z)$ temos uma fórmula explicita para a p-curvatura. De fato, é possível mostrar que

$$A_p(z) = A^{[p-1]}(z) + A(z)^p$$

Teorema (Honda)

Seja $E : y^{[1]} = a(z)y$ um sistema linear homogêneo de ***posto*** *1 com $a(z) \in \mathbb{Q}(z)$. Os seguintes são equivalentes:*

Redução módulo p e algebricidade

No caso do sistema diferencial $E : y^{[1]} = a(z)y$ sobre $\mathbb{F}_p(z)$ temos uma fórmula explicita para a p-curvatura. De fato, é possível mostrar que

$$A_p(z) = A^{[p-1]}(z) + A(z)^p$$

Teorema (Honda)

*Seja $E : y^{[1]} = a(z)y$ um sistema linear homogêneo de **posto** 1 com $a(z) \in \mathbb{Q}(z)$. Os seguintes são equivalentes:*

- *Solução fundamental de E é algébrica sobre $\mathbb{Q}(z)$.*

Redução módulo p e algebricidade

No caso do sistema diferencial $E : y^{[1]} = a(z)y$ sobre $\mathbb{F}_p(z)$ temos uma fórmula explicita para a p-curvatura. De fato, é possível mostrar que

$$A_p(z) = A^{[p-1]}(z) + A(z)^p$$

Teorema (Honda)

*Seja $E : y^{[1]} = a(z)y$ um sistema linear homogêneo de **posto** 1 com $a(z) \in \mathbb{Q}(z)$. Os seguintes são equivalentes:*

- *Solução fundamental de E é algébrica sobre $\mathbb{Q}(z)$.*
- *A p-curvatura de $E \otimes \mathbb{F}_p$ é zero para quase todo primo p.*

Redução módulo p e algebricidade

No caso do sistema diferencial $E : y^{[1]} = a(z)y$ sobre $\mathbb{F}_p(z)$ temos uma fórmula explicita para a p-curvatura. De fato, é possível mostrar que

$$A_p(z) = A^{[p-1]}(z) + A(z)^p$$

Teorema (Honda)

Seja $E : y^{[1]} = a(z)y$ um sistema linear homogêneo de ***posto*** *1 com $a(z) \in \mathbb{Q}(z)$. Os seguintes são equivalentes:*

- *Solução fundamental de E é algébrica sobre $\mathbb{Q}(z)$.*
- *A p-curvatura de $E \otimes \mathbb{F}_p$ é zero para quase todo primo p.*
- *Seja $\omega = a(z)dz \in \Omega^1_{\mathbb{Q}(z)/\mathbb{Q}}$. Então, todos os polos de ω tem ordem 1 e com residuos em $\mathbb{Q}$.*

Exemplo

Considere $E : y^{[']} = \frac{1}{z^2+1}y$. *Como os resíduos da função* $f(z) = 1/z^2 + 1$ *não estão em* $\mathbb{Q}$ *concluimos via teorema acima que* E *não admite base de soluções algébrica sobre* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.

O caso geral é um problema em aberto conhecido como

Conjectura de Grothendieck-Katz I

Seja $E[y] : \sum_{i=1}^{n} a_i(z) y^{[i]}$ *um sistem de equações diferenciais sobre* $\mathbb{C}$ *onde* $a_i(z) \in \mathbb{Q}(z)$*. Então, os seguintes são equivalentes:*

- $E[y] = 0$ *admite* n*-soluções* $\mathbb{C}$*-linearmente independentes que são algébricas sobre* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$*.*
- *Para quase todo primo* p *o sistema diferencial obtido por redução* mod p, $E[y] \otimes \mathbb{F}_p$*, admite* n*-soluções* $\mathbb{F}_p(z^p)$*-linearmente independentes que são algébricas sobre* $\overline{\mathbb{F}}_p(z)$*.*

O caso geral é um problema em aberto conhecido como

Conjectura de Grothendieck-Katz I

Seja $E[y] : \sum_{i=1}^{n} a_i(z)y^{[i]}$ *um sistem de equações diferenciais sobre* $\mathbb{C}$ *onde* $a_i(z) \in \mathbb{Q}(z)$. *Então, os seguintes são equivalentes:*

- $E[y] = 0$ *admite* n*-soluções* $\mathbb{C}$*-linearmente independentes que são algébricas sobre* $\overline{\mathbb{Q}}(z)$.
- *Para quase todo primo* p *o sistema diferencial obtido por redução* mod p, $E[y] \otimes \mathbb{F}_p$, *admite* n*-soluções* $\mathbb{F}_p(z^p)$*-linearmente independentes que são algébricas sobre* $\overline{\mathbb{F}}_p(z)$.

Conjectura de Grothendieck-Katz II

Seja X *uma variedade projetiva lisa sobre* $\mathbb{C}$ *e* $(\mathcal{F}, \nabla)$ *uma equação diferencial em* X. *Suponha que para quase todo primo* p *a equação diferencial* $(\mathcal{F}_p, \nabla_p)$ *em* X_p, *obtida por redução modulo* p, *possui* p*-curvatura nula. Então,* $(\mathcal{F}, \nabla)$ *é trivial, módulo recobrimento etale.*

Folheações em superfícies: estrutura local

Seja U uma vizinhança de $Q := (0,0) \in \mathbb{C}^2$ e denote por $\mathcal{O}_U$ o anel de germes de funções holomorfas em Q. Sejam $\mathcal{M}$ o ideal maximal x, y um sistema de parâmetros sobre Q.

Folheações em superfícies: estrutura local

Seja U uma vizinhança de $Q := (0,0) \in \mathbb{C}^2$ e denote por $\mathcal{O}_U$ o anel de germes de funções holomorfas em Q. Sejam $\mathcal{M}$ o ideal maximal x, y um sistema de parâmetros sobre Q.

Definição

Um campo holomorfo em U com singularidade isolada em 0 é uma derivação

$$D = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y \in Der_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[[x,y]])$$

tal que $a(x,y), b(x,y) \in \mathcal{O}_U$ e $\mathcal{Z}(a(x,y), b(x,y)) = \{(0,0)\}$.

Folheações em superfícies: estrutura local

Seja U uma vizinhança de $Q := (0,0) \in \mathbb{C}^2$ e denote por $\mathcal{O}_U$ o anel de germes de funções holomorfas em Q. Sejam $\mathcal{M}$ o ideal maximal x, y um sistema de parâmetros sobre Q.

Definição

Um campo holomorfo em U com singularidade isolada em 0 é uma derivação

$$D = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y \in Der_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[[x,y]])$$

tal que $a(x,y), b(x,y) \in \mathcal{O}_U$ e $\mathcal{Z}(a(x,y), b(x,y)) = \{(0,0)\}$.

Definição

Seja C uma curva analítica irredutível em descrita em torno de $(0,0)$ pela equação $f(x,y) = 0$. Dizemos que C é invariante por D se $D(f) \in (f)$.

Folheação associada

Definição

Seja v um campo em U com singularidade isolada em 0. Para cada $Q \in U - \{(0,0)\}$ seja $v_Q \in T_Q U$ a direção determinada pelo campo v. A folheação definida por v em $U - \{(0,0)\}$, denotada por $\mathcal{F}_v$, é a coleção dos $\mathbb{C}$-subespaços: $\{\langle v_Q \rangle\}_{Q \in U}$. Uma folha de $\mathcal{F}_v$ é uma curva analítica C em $U - \{(0,0)\}$ tal que $T_Q C = v_Q$ para todo $Q \in C$.

Folheação associada

Definição

Seja v um campo em U com singularidade isolada em 0. Para cada $Q \in U - \{(0,0)\}$ seja $v_Q \in T_Q U$ a direção determinada pelo campo v. A folheação definida por v em $U - \{(0,0)\}$, denotada por $\mathcal{F}_v$, é a coleção dos $\mathbb{C}$-subespaços: $\{\langle v_Q \rangle\}_{Q \in U}$. Uma folha de $\mathcal{F}_v$ é uma curva analítica C em $U - \{(0,0)\}$ tal que $T_Q C = v_Q$ para todo $Q \in C$.

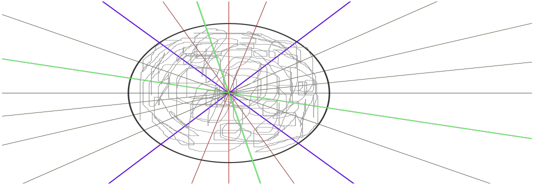

Figura 1: $\mathcal{F}_v : x\partial_x + y\partial_y$ admite muitas folhas "perto"de $(0,0)$

Integrais primeiras holomorfas

Uma classe importante de campos são aqueles que admite integrais primeiras holomorfas.

Definição

Seja v um campo holomorfo em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Dizemos que f adamite uma integral primeira holomofra em torno de Q se existir uma função $f \in \mathcal{O}_X$ não constante tal que $v(f) = 0$.

Integrais primeiras holomorfas

Uma classe importante de campos são aqueles que admite integrais primeiras holomorfas.

Definição

Seja v um campo holomorfo em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Dizemos que f adamite uma integral primeira holomofra em torno de Q se existir uma função $f \in \mathcal{O}_X$ não constante tal que $v(f) = 0$.

A existência de integral primeira é uma condição forte para estrutura da folheação $\mathcal{F}_v$. De fato, não é difícil verificar que

Proposição

Seja $\mathcal{F}_v$ a folheação definida por v em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Suponha que $\mathcal{F}_v$ admite uma integral primeira holomorfa. Então,

- *As folhas de $\mathcal{F}$ são fechadas em $U - \{(0,0)\}$.*
- *Apenas um número finito de folhas se acumulam em torno de 0.*

Integrais primeiras holomorfas: Critério topológico

A recíproca da proposição acima é um teorema

Teorema de Mattei-Moussu

Seja $\mathcal{F}_v$ a folheação holomorfa definida por um campo v em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Suponha que

- *Apenas um número finito de folhas se acumulam em $(0, 0)$.*
- *As folhas de $\mathcal{F}_v$ são fechadas em $U - \{(0, 0)\}$.*

Então, $\mathcal{F}_v$ possui integral primeira holomorfa não constante $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$

Modelos e redução módulo p

Seja
$$v = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y$$
um campo em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Escreva $a(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$, $b(x,y) = \sum_{i,j} b_{ij}x^i y^j$ e denote por $R[v] = \mathbb{Z}[\{a_{i,j}, b_{i,j}\}]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra por adjunção de todos os coeficientes ocorrendo em v.

Modelos e redução módulo p

Seja
$$v = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y$$
um campo em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Escreva $a(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$, $b(x,y) = \sum_{i,j} b_{ij}x^i y^j$ e denote por $R[v] = \mathbb{Z}[\{a_{i,j}, b_{i,j}\}]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra por adjunção de todos os coeficientes ocorrendo em v.

Definição

Dizemos que v é de tipo finito sobre $\mathbb{Z}$ se $R[v]$ é uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito.

Modelos e redução módulo p

Seja

$$v = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y$$

um campo em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Escreva $a(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^i y^j$, $b(x,y) = \sum_{i,j} b_{ij}x^i y^j$ e denote por $R[v] = \mathbb{Z}[\{a_{i,j}, b_{i,j}\}]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra por adjunção de todos os coeficientes ocorrendo em v.

Definição

Dizemos que v é de tipo finito sobre $\mathbb{Z}$ se $R[v]$ é uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito.

Lema

*Seja R uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito e $\mathcal{M} \in$ **Spm** R um ideal maximal. Então, $R/\mathcal{M}$ é um corpo finito.*

Modelos e redução módulo p

Seja

$$v = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y$$

um campo em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Escreva $a(x,y) = \sum_{i,j} a_{ij}x^iy^j$, $b(x,y) = \sum_{i,j} b_{ij}x^iy^j$ e denote por $R[v] = \mathbb{Z}[\{a_{i,j}, b_{i,j}\}]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra por adjunção de todos os coeficientes ocorrendo em v.

Definição

Dizemos que v é de tipo finito sobre $\mathbb{Z}$ se $R[v]$ é uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito.

Lema

Seja R uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito e $\mathcal{M} \in \textbf{Spm}\, R$ um ideal maximal. Então, $R/\mathcal{M}$ é um corpo finito.

Exemplo

Se $a, b \in \mathbb{C}[x,y]$ então $v = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y$ é de tipo finito.

Integrais primeiras holomorfas: um critério aritmético

Lema

Sejam R uma k-algebra comutativa com $char(k) = p >$ e $v \in Der_k(R)$. Então, $v^p \in Der_k(R)$.

Integrais primeiras holomorfas: um critério aritmético

Lema

Sejam R uma k-algebra comutativa com $char(k) = p >$ e $v \in Der_k(R)$. Então, $v^p \in Der_k(R)$.

De fato, isso se segue da fórmula $v^j(fg) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} v^k(f) v^{j-k}(g)$ com $j := p$.

Integrais primeiras holomorfas: um critério aritmético

Lema

Sejam R uma k-algebra comutativa com $char(k) = p >$ e $v \in Der_k(R)$. Então, $v^p \in Der_k(R)$.

De fato, isso se segue da fórmula $v^j(fg) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} v^k(f) v^{j-k}(g)$ com $j := p$.

Definição

Sejam R um dominio de tipo finito sobre k e $v \in Der_k(R)$. Dizemos que v é p-fechada se $v^p = \alpha v$ para algum $\alpha \in R$.

Integrais primeiras holomorfas: um critério aritmético

Lema

Sejam R uma k-algebra comutativa com $char(k) = p >$ e $v \in Der_k(R)$. Então, $v^p \in Der_k(R)$.

De fato, isso se segue da fórmula $v^j(fg) = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} v^k(f) v^{j-k}(g)$ com $j := p$.

Definição

Sejam R um dominio de tipo finito sobre k e $v \in Der_k(R)$. Dizemos que v é p-fechada se $v^p = \alpha v$ para algum $\alpha \in R$.

Teorema

Seja R um dominio de tipo finito finito sobre k e $v \in Der_k(R)$. Então, v é p-fechada se e somente se admite uma integral primeira não trivial i.e. existe $f \in R - R^p$ tal que $v(f) = 0$.

Sejam v um campo holomorfo de tipo finito em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e $Q \in \mathbf{Spm}(R[v])$ tal que $Q \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ para algum primo p. Denote por $v_p := v \otimes R/\mathcal{M}$ a redução módulo $\mathcal{M}$ de v. A **p-curvatura de v** é definida pondo

$$D_p(v) := \frac{v_p \wedge v_p^p}{\partial_x \wedge \partial_y} \in R/\mathcal{M}[[x, y]]$$

Sejam v um campo holomorfo de tipo finito em $(\mathbb{C}^2, 0)$ e $Q \in \mathbf{Spm}(R[v])$ tal que $Q \cap \mathbb{Z} = p\mathbb{Z}$ para algum primo p. Denote por $v_p := v \otimes R/\mathcal{M}$ a redução módulo $\mathcal{M}$ de v. A **p-curvatura de v** é definida pondo

$$D_p(v) := \frac{v_p \wedge v_p^p}{\partial_x \wedge \partial_y} \in R/\mathcal{M}[[x, y]]$$

Definição

*A **função aritmética** associada ao campo v é definida pondo*

$$\mu_v : \boldsymbol{Spm}(R[v]) \longrightarrow \mathbb{Z}_{>0} \cup \{\infty\} \qquad \mathcal{M} \mapsto ord_0(D_p(v))$$

onde $ord_0(D_p(v)) := \sup\{n \in \mathbb{N} \mid D_p(v) \in \langle x, y\rangle^n\}$

Exemplo

Seja $v_\alpha = x\partial_x + \alpha y \partial_y$ *um campo em* $(\mathbb{C}^2, 0)$ *com* $\alpha \in \mathbb{C}^*$. *É bem conhecido que* $\alpha \in \mathbb{Q}$ *se e somente se para uma quase todo primo* p *temos que* $\alpha^p = \alpha \mod p$. *A* p*-curvatura nesse caso é dada por*

$$D_p(v) = (\overline{\alpha}^p - \overline{\alpha})xy$$

Observação

Se tomarmos $\alpha = -p/q$ *com* $p, q \in \mathbb{Z}_{>0}$ *coprimos segue que* v_α *admite uma integral primeira holomofa. De fato,*

$$v_{-p/q}(x^q y^p) = xpx^{p-1}y^q - (p/q)qyx^p y^{q-1} = 0.$$

Nesse caso, a p*-curvatura é trivial para todo primo* l *tal que* $l \neq q$.

Um critério aritmético

Seja v um campo holomorfo de tipo finito em $(\mathbb{C}^2, 0)$

$$v = a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y.$$

Considere a matriz jacobiana associada Jv e denote por α_1 e α_2 os auto-valores associados a $Jv(0)$.

Um critério aritmético

Seja v um campo holomorfo de tipo finito em $(\mathbb{C}^2, 0)$

$$v = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y.$$

Considere a matriz jacobiana associada Jv e denote por α_1 e α_2 os auto-valores associados a $Jv(0)$. Dizemos que 0 é não degenerada se $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$.

Um critério aritmético

Seja v um campo holomorfo de tipo finito em $(\mathbb{C}^2, 0)$

$$v = a(x, y)\partial_x + b(x, y)\partial_y.$$

Considere a matriz jacobiana associada Jv e denote por α_1 e α_2 os auto-valores associados a $Jv(0)$. Dizemos que 0 é não degenerada se $\alpha_1\alpha_2 \neq 0$.

Teorema

*Seja v um campo holomorfo de tipo finito em $(\mathbb{C}^2, 0)$. Suponha que 0 seja uma singularidade não degenerada com quociente de autovalores $\alpha \in \mathbb{Q}_{<0}$. Então, v **não** admite integral primeira holomorfa $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ se e somente se μ_v é uma função **limitada**.*

Esboço de prova

A idéia é utilizar um algoritmo que simplifica o campo v e comparar as operações que são realizadas sobre $\mathbb{C}$ e sobre $\mathbb{F}_p$. A comparação é realizada pela seguinte:

Proposição

Seja v um campo holomorfo em $(\mathbb{C}^2, 0)$ com parte linear $v_1 = ax\partial_x - by\partial_y$ com $a, b \in \mathbb{Z}$ coprimos. Sejam $m \in \mathbb{N}$ e defina

$$\mathcal{D}_m := \mathbb{C} - \textit{espaço dos polômios em } \mathbb{C}[x,y] \textit{ de grau} \leq m.$$

Seja $A = diag(a, -b)$ a matriz associada a parte linear de ev. Defina,

$$L_A^{[m]} : \mathcal{D}_m^2 \longrightarrow \mathcal{D}_m^2 \qquad P_m \mapsto JP_m A\tilde{X} - AP_m\tilde{X}$$

onde $\tilde{X} = (x, y)^t$. Suponha que $L_A^{[m]}$ seja um isomorfismo. Então, $L_{A\otimes\overline{\mathbb{F}_p}}^{[m]}$ é um $\mathbb{F}_p$ isomorfismo para todo primo p tal que $m < [\frac{p-|ab|}{|a-b|+ab}]$

Folheações em variedades complexas

Seja X uma variedade complexa. Uma folheação holomorfa de codimensão um em X consiste em uma coleção $\{(U_i)_{i \in I}, (\omega_i)_{i \in I}, (g_{ij})_{U_{ij} \neq \emptyset}\}$ tais que

- $\{U_i\}_i$ é uma cobertura aberta de X.
- $\omega_i \in \Omega^1_{U_i}$ são 1-formas em U_i satisfazendo condição de integrabilidade $\omega_i \wedge d\omega_i = 0$.
- $\operatorname{codim}(\operatorname{sing}(\omega_i)) \geq 2$ para todo i.
- $g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_{ij})$ e em U_{ij} temos $\omega_i = g_{ij}\omega_j$.

Folheações em variedades complexas

Seja X uma variedade complexa. Uma folheação holomorfa de codimensão um em X consiste em uma coleção $\{(U_i)_{i\in I}, (\omega_i)_{i\in I}, (g_{ij})_{U_{ij}\neq\emptyset}\}$ tais que

- $\{U_i\}_i$ é uma cobertura aberta de X.
- $\omega_i \in \Omega^1_{U_i}$ são 1-formas em U_i satisfazendo condição de integrabilidade $\omega_i \wedge d\omega_i = 0$.
- $\operatorname{codim}(\operatorname{sing}(\omega_i)) \geq 2$ para todo i.
- $g_{ij} \in \mathcal{O}^*_X(U_{ij})$ e em U_{ij} temos $\omega_i = g_{ij}\omega_j$.

Dada uma folheação $\{(U_i, \omega_i, g_{ij})\}$ obtemos naturalmente os seguintes feixes $T_\mathcal{F}$ e $N^*_\mathcal{F}$ que são definidos em cada aberto U_i pondo

$$T_\mathcal{F} := \{v \in T_X \mid i_v\omega_i = 0\} \hookrightarrow T_X$$

$$N^*_\mathcal{F} := Ann(T_\mathcal{F}) = \{\omega \in \Omega^1_X \mid i_v\omega = 0 \forall v \in T_\mathcal{F}\} \hookrightarrow \Omega^1_X$$

São chamados de o feixe tangente e conormal de $\mathcal{F}$ respectivamente. A condição de integrabilidade implica que $T_\mathcal{F}$ é fechado por colchete de Lie.

Folheações holomorfas em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Teorema de Chow folheado

Uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de codimensão 1 *de* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ *pode ser definida por uma forma homogênea projetiva* $\omega_{d+1} = \sum_{i=0}^{n} A_i dx_i$ *em* $\mathbb{C}^{n+1}$ *com* $A_i \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_{d+1}$ *e* codim $sing(\omega) \geq 2$.

$d :=$ grau da folheação $\mathcal{F}$.

Folheações holomorfas em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

Teorema de Chow folheado

Uma folheação holomorfa $\mathcal{F}$ de codimensão 1 *de* $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ *pode ser definida por uma forma homogênea projetiva* $\omega_{d+1} = \sum_{i=0}^{n} A_i dx_i$ *em* $\mathbb{C}^{n+1}$ *com* $A_i \in \mathbb{C}[x_0, ..., x_n]_{d+1}$ *e* codim $sing(\omega) \geq 2$.

$d :=$ grau da folheação $\mathcal{F}$.

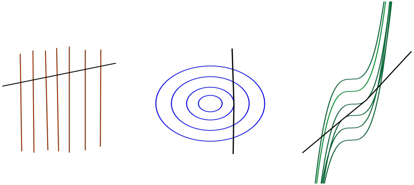

Figura 2: Folheações de grau $0, 1$ e 2

Usando a sequencia exata de Euler,

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} \longrightarrow \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} \longrightarrow 0$$

vemos que uma seção global de $H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(d+2))$ se identifica com uma 1-forma homogênea ω em $\mathbb{C}^{n+1}$ de grau $d+2$ que satisfaz a condição de Euler $i_R\omega = 0$ (projetividade) onde

$$R = \sum_{i=0}^{n} x_i \partial_{x_i}.$$

Usando a sequencia exata de Euler,

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} \longrightarrow \bigoplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}} \longrightarrow 0$$

vemos que uma seção global de $H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(d+2))$ se identifica com uma 1-forma homogênea ω em $\mathbb{C}^{n+1}$ de grau $d+2$ que satisfaz a condição de Euler $i_R\omega = 0$ (projetividade) onde

$$R = \sum_{i=0}^{n} x_i \partial_{x_i}.$$

Assim, o conjunto de folheações de codimensão 1 em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ se identifica com o seguinte conjunto

$$\mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}) := \{[\omega] \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}}(d+2))) \mid \omega \wedge d\omega = 0 \text{ e } \operatorname{codim}(\operatorname{sing}(\omega)) \geq 2\}$$

que é um localmente fechado em $\mathbb{P}^N_{\mathbb{C}}$ onde $N = h^0(\mathbb{P}^n, \Omega^1_{\mathbb{P}^n}(d+1))) - 1$.

Folheações em $\mathbb{P}^n_k$

Definição

Seja k um corpo algebricamente fechado e $n \geq 2$. Uma folheação de codimensão 1 de grau d em $\mathbb{P}^n_k$ é um elemento da variedade

$$\mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^n_k) := \{[\omega] \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n_k, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(d+2))) \mid \omega \wedge d\omega = 0 \ \textit{e} \ \operatorname{codim}(\operatorname{sing}(\omega)) \geq 2\}$$

Folheações em $\mathbb{P}^n_k$

Definição

Seja k um corpo algebricamente fechado e $n \geq 2$. Uma folheação de codimensão 1 de grau d em $\mathbb{P}^n_k$ é um elemento da variedade

$$\mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^n_k) := \{[\omega] \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^n_k, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k}(d+2))) \mid \omega \wedge d\omega = 0 \text{ e } \mathrm{codim}(\mathrm{sing}(\omega)) \geq 2\}$$

Assim, uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{P}^n_k$ é representada por 1-forma projetiva

$$\omega = A_0 dx_0 + \cdots + A_n dx_n$$

onde $A_0, \cdots, A_n \in k[x_0, ..., x_n]_{d+1}$ e $\mathrm{sing}(\mathcal{F}) := \mathcal{Z}(A_0, A_1, \cdots, A_n)$ com $\mathrm{codim}(\mathrm{sing}(\mathcal{F})) \geq 2$.

Soluções algébricas

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{P}^n_k$ definida por ω. Uma hipersuperfície irredutível $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n_k$ é invariante por $\mathcal{F}$ se

$$\omega \wedge dF \in \langle F \rangle$$

Soluções algébricas

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{P}^n_k$ definida por ω. Uma hipersuperfície irredutível $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n_k$ é invariante por $\mathcal{F}$ se

$$\omega \wedge dF \in \langle F \rangle$$

Problema

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(\mathbb{P}^n_k)$.

Soluções algébricas

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{P}^n_k$ definida por ω. Uma hipersuperfície irredutível $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n_k$ é invariante por $\mathcal{F}$ se

$$\omega \wedge dF \in \langle F \rangle$$

Problema

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(\mathbb{P}^n_k)$.

- *$\mathcal{F}$ admite uma hipersuperfície $\mathcal{F}$-invariante?*

Soluções algébricas

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão 1 em $\mathbb{P}^n_k$ definida por ω. Uma hipersuperfície irredutível $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^n_k$ é invariante por $\mathcal{F}$ se

$$\omega \wedge dF \in \langle F \rangle$$

Problema

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol(\mathbb{P}^n_k)$.

- *$\mathcal{F}$ admite uma hipersuperfície $\mathcal{F}$-invariante?*
- *Se existir uma solução algébrica, o que podemos dizer sobre o grau?*

Teorema

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^n_k)$ com $char(k) = p > d + 2$. Suponha que $\mathcal{F}$ seja não p-fechada. Então, $\mathcal{F}$ admite uma solução algébrica de grau no máximo $pd + d + 2$.

Teorema

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^n_k)$ com $char(k) = p > d + 2$. Suponha que $\mathcal{F}$ seja não p-fechada. Então, $\mathcal{F}$ admite uma solução algébrica de grau no máximo $pd + d + 2$.

Teorema (Jouanolou)

Uma folheação genérica de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ não admite soluções algébricas.

Teorema

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^n_k)$ com $char(k) = p > d + 2$. Suponha que $\mathcal{F}$ seja não p-fechada. Então, $\mathcal{F}$ admite uma solução algébrica de grau no máximo $pd + d + 2$.

Teorema (Jouanolou)

Uma folheação genérica de grau d em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ não admite soluções algébricas.

Teorema (Pereira)

Uma folheação não dicritica em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ para $n \geq 4$ possui uma solução algébrica.

Limitação do grau

Problema de Poincaré

Sejam k um corpo de caracteristica $p \geq 0$ e $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^n_k$. Seja $X = \mathcal{Z}(F)$ uma hipersuperfície reduzida que é $\mathcal{F}$-invariante. Existe uma cota para $\deg(X)$ dependendo apenas de $\deg(\mathcal{F})$?

Limitação do grau

Problema de Poincaré

Sejam k um corpo de caracteristica $p \geq 0$ e $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^n_k$. Seja $X = \mathcal{Z}(F)$ uma hipersuperfície reduzida que é $\mathcal{F}$-invariante. Existe uma cota para $\deg(X)$ dependendo apenas de $\deg(\mathcal{F})$?

Caso "fácil":

Proposição

Suponha que X seja não singular e que $p \nmid \deg(\mathcal{F}) + 2$. Então,

$$\deg(X) \leq \deg(\mathcal{F}) + 1.$$

Limitação do grau

Problema de Poincaré

Sejam k um corpo de caracteristica $p \geq 0$ e $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^n_k$. Seja $X = \mathcal{Z}(F)$ uma hipersuperfície reduzida que é $\mathcal{F}$-invariante. Existe uma cota para $\deg(X)$ dependendo apenas de $\deg(\mathcal{F})$?

Caso "fácil":

Proposição

Suponha que X seja não singular e que $p \nmid \deg(\mathcal{F}) + 2$. Então,

$$\deg(X) \leq \deg(\mathcal{F}) + 1.$$

Teorema de Carnicer

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não dicritica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Então, $\deg(X) \leq \deg(\mathcal{F}) + 2$ para qualquer curva algébrica reduzida $\mathcal{F}$-invariante.

p-Curvatura de folheações em $\mathbb{P}^2_k$

Seja k um corpo algebricamente fechado de caracteristica $p > d+2$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau d em $\mathbb{P}^2_k$ definida pela 1-forma projetiva $\omega = \sum_{i=0}^2 A_i dx_i$. A condição de projetividade $i_R\omega = 0$ implica que existem $L, M, N \in k[x_0, x_1, x_3]_{d+1}$ tais que

$$A_0 = x_2 M - x_1 N \quad A_1 = x_0 N - x_2 L \quad A_2 = x_1 L - x_0 M$$

p-Curvatura de folheações em $\mathbb{P}^2_k$

Seja k um corpo algebricamente fechado de caracteristica $p > d+2$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau d em $\mathbb{P}^2_k$ definida pela 1-forma projetiva $\omega = \sum_{i=0}^{2} A_i dx_i$. A condição de projetividade $i_R\omega = 0$ implica que existem $L, M, N \in k[x_0, x_1, x_3]_{d+1}$ tais que

$$A_0 = x_2 M - x_1 N \quad A_1 = x_0 N - x_2 L \quad A_2 = x_1 L - x_0 M$$

A tripla (L, M, N) determina um campo vetorial em k^3:
$v = L\partial_{x_0} + M\partial_{x_1} + N\partial_{x_2}$ e tal campo satisfaz

$$i_v\omega = LA_0 + MA_1 + NA_2 = 0$$

Diremos que v é um campo que define $\mathcal{F}$.

p-Curvatura de folheações em $\mathbb{P}^2_k$

Seja k um corpo algebricamente fechado de caracteristica $p > d + 2$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau d em $\mathbb{P}^2_k$ definida pela 1-forma projetiva $\omega = \sum_{i=0}^{2} A_i dx_i$. A condição de projetividade $i_R\omega = 0$ implica que existem $L, M, N \in k[x_0, x_1, x_3]_{d+1}$ tais que

$$A_0 = x_2 M - x_1 N \quad A_1 = x_0 N - x_2 L \quad A_2 = x_1 L - x_0 M$$

A tripla (L, M, N) determina um campo vetorial em k^3: $v = L\partial_{x_0} + M\partial_{x_1} + N\partial_{x_2}$ e tal campo satisfaz

$$i_v\omega = LA_0 + MA_1 + NA_2 = 0$$

Diremos que v é um campo que define $\mathcal{F}$.

Lema

Seja $v^{'} = L^{'}\partial_{x_0} + M^{'}\partial_{x_1} + N^{'}\partial_{x_2}$ outro campo definindo ω. Então, $v = v + gR$ para algum $g \in k[x_0, x_1, x_2]_{d-1}$.

p-Curvatura de folheações em $\mathbb{P}^2_k$

Proposição

Existe uma bijeção entre o conjunto de 1*-formas projetivas* $\omega = \sum_{i=0}^{n} A_i dx_i$ *e o conjunto de campos de grau* d *homogêneos* $v = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z$ *tais que* $L_x + M_y + N_z = 0$.

A associação $\omega \mapsto v$ é definida da fórmula:

$$d\omega = (d+2)(L dy \wedge dz - M dx \wedge dz + N dx \wedge dy).$$

p-Curvatura de folheações em $\mathbb{P}^2_k$

Proposição

Existe uma bijeção entre o conjunto de 1-formas projetivas $\omega = \sum_{i=0}^{n} A_i dx_i$ e o conjunto de campos de grau d homogêneos $v = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z$ tais que $L_x + M_y + N_z = 0$.

A associação $\omega \mapsto v$ é definida da fórmula:

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_k$ definida pela 1-forma projetiva ω. Seja v o campo associado a ω, dado pela proposição acima. Diremos que v é o campo de Darboux associado a $\mathcal{F}$.

p-curvatura

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^2_k)$ definida pela 1-forma projetiva ω com campo de Darboux associado v.

p-curvatura

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^2_k)$ definida pela 1-forma projetiva ω com campo de Darboux associado v.

Definição

A p-curvatura de $\mathcal{F}$ é o divisor

$$\Delta_{\mathcal{F}} = [i_{v^p}\omega] \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_k)$$

*Dizemos que $\mathcal{F}$ é **p-fechada** se $\Delta_{\mathcal{F}} = 0$.*

p-curvatura

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^2_k)$ definida pela 1-forma projetiva ω com campo de Darboux associado v.

Definição

A p-curvatura de $\mathcal{F}$ é o divisor

$$\Delta_{\mathcal{F}} = [i_{v^p}\omega] \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_k)$$

*Dizemos que $\mathcal{F}$ é **p-fechada** se $\Delta_{\mathcal{F}} = 0$.*

Proposição

Suponha que $\mathcal{F}$ seja não p-fechada e seja $C = \{F = 0\}$ uma curva algébrica reduzida que é $\mathcal{F}$-invariante. Então, $\Delta_{\mathcal{F}} \geq [C]$.

De fato, como $\omega \wedge dF \in \langle F \rangle$ temos uma relação do tipo

$$i_{v^p}\omega F - v^p(F)\omega = F\sigma$$

Daí, $F | i_{v^p}\omega$.

Irredutibilidade e não algebricidade.

Proposição

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma folheação ***não dicritica****. Assuma que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma 1-forma projetiva*

$$\omega = A_0(X,Y,Z)dX + A_1(X,Y,Z)dY + A_2(X,Y,Z)dZ$$

com $A, B, C \in \mathbb{Z}[X,Y,Z]$ e seja $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ um número primo. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível então $\mathcal{F}$ não admite nenhuma solução algébrica.

Irredutibilidade e não algebricidade.

Proposição

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ uma folheação ***não dicritica****. Assuma que $\mathcal{F}$ pode ser definida por uma 1-forma projetiva*

$$\omega = A_0(X,Y,Z)dX + A_1(X,Y,Z)dY + A_2(X,Y,Z)dZ$$

com $A, B, C \in \mathbb{Z}[X,Y,Z]$ e seja $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ um número primo. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível então $\mathcal{F}$ não admite nenhuma solução algébrica.

Definição

Seja $Q \in \mathrm{sing}(\mathcal{F})$. Dizemos que

- *Q é não dicritica se existe apenas um número finito de separatrizes sobre Q.*
- *$\mathcal{F}$ é não dicritica se $\forall Q \in sing(\mathcal{F})$ é não dicritica.*

Argumento

Suponha que $\mathcal{F}$ admita uma solução algébrica $C = \mathcal{Z}(F)$ irredutível.

Argumento

Suponha que $\mathcal{F}$ admita uma solução algébrica $C = \mathcal{Z}(F)$ irredutível.

Lema

Seja $C = \{F = 0\}$ uma curva algébrica irredutível sobre $\mathbb{C}$ que é $\mathcal{F}$-invariante. Então existe uma curva algébrica $H = \{G = 0\}$ que é $\mathcal{F}$-invariante com $G \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ irredutível e $G \otimes \mathbb{C}$ reduzido.

Argumento

Suponha que $\mathcal{F}$ admita uma solução algébrica $C = \mathcal{Z}(F)$ irredutível.

Lema

Seja $C = \{F = 0\}$ uma curva algébrica irredutível sobre $\mathbb{C}$ que é $\mathcal{F}$-invariante. Então existe uma curva algébrica $H = \{G = 0\}$ que é $\mathcal{F}$-invariante com $G \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ irredutível e $G \otimes \mathbb{C}$ reduzido.

- Podemos supor que $F \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ é irredutível com $F \otimes \mathbb{C}$ reduzido. Pelo teorema de Carnicer temos $\deg(F) \leq d + 2$.

Argumento

Suponha que $\mathcal{F}$ admita uma solução algébrica $C = \mathcal{Z}(F)$ irredutível.

Lema

Seja $C = \{F = 0\}$ uma curva algébrica irredutível sobre $\mathbb{C}$ que é $\mathcal{F}$-invariante. Então existe uma curva algébrica $H = \{G = 0\}$ que é $\mathcal{F}$-invariante com $G \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ irredutível e $G \otimes \mathbb{C}$ reduzido.

- Podemos supor que $F \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ é irredutível com $F \otimes \mathbb{C}$ reduzido. Pelo teorema de Carnicer temos $\deg(F) \leq d + 2$.
- Seja $F_p = F \otimes \mathbb{F}_p$ polinômio obtido por redução módulo p. Observe que F admite um fator irredutível G sobre $\mathbb{F}_p[X, Y, Z]$ tal que a curva algébrica descrita por G é $\mathcal{F}_p$-invariante. De fato, isso se segue já que estamos assumindo $p > d + 2$.

Argumento

Suponha que $\mathcal{F}$ admita uma solução algébrica $C = \mathcal{Z}(F)$ irredutível.

Lema

Seja $C = \{F = 0\}$ uma curva algébrica irredutível sobre $\mathbb{C}$ que é $\mathcal{F}$-invariante. Então existe uma curva algébrica $H = \{G = 0\}$ que é $\mathcal{F}$-invariante com $G \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ irredutível e $G \otimes \mathbb{C}$ reduzido.

- Podemos supor que $F \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ é irredutível com $F \otimes \mathbb{C}$ reduzido. Pelo teorema de Carnicer temos $\deg(F) \leq d + 2$.
- Seja $F_p = F \otimes \mathbb{F}_p$ polinômio obtido por redução módulo p. Observe que F admite um fator irredutível G sobre $\mathbb{F}_p[X, Y, Z]$ tal que a curva algébrica descrita por G é $\mathcal{F}_p$-invariante. De fato, isso se segue já que estamos assumindo $p > d + 2$.
- Por outro lado, devemos ter $G | \Delta_{\mathcal{F}_p}$ o que implica a igualdade, já que $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível.

Argumento

Suponha que $\mathcal{F}$ admita uma solução algébrica $C = \mathcal{Z}(F)$ irredutível.

Lema

Seja $C = \{F = 0\}$ uma curva algébrica irredutível sobre $\mathbb{C}$ que é $\mathcal{F}$-invariante. Então existe uma curva algébrica $H = \{G = 0\}$ que é $\mathcal{F}$-invariante com $G \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ irredutível e $G \otimes \mathbb{C}$ reduzido.

- Podemos supor que $F \in \mathbb{Z}[X, Y, Z]$ é irredutível com $F \otimes \mathbb{C}$ reduzido. Pelo teorema de Carnicer temos $\deg(F) \leq d + 2$.
- Seja $F_p = F \otimes \mathbb{F}_p$ polinômio obtido por redução módulo p. Observe que F admite um fator irredutível G sobre $\mathbb{F}_p[X, Y, Z]$ tal que a curva algébrica descrita por G é $\mathcal{F}_p$-invariante. De fato, isso se segue já que estamos assumindo $p > d + 2$.
- Por outro lado, devemos ter $G | \Delta_{\mathcal{F}_p}$ o que implica a igualdade, já que $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível.
- Contradição!

Exemplos

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ a folheação de Jouanolou de grau 2 em $\mathbb{P}^2_k$ que é definida pela 1-forma

$$\omega = (zx^2 - y^3)dx - (z^3 - xy^2)dy + (yz^2 - x^3)dz$$

Então, $\mathcal{F}$ não admite curva algébrica invariante.

Exemplos

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ a folheação de Jouanolou de grau 2 em $\mathbb{P}^2_k$ que é definida pela 1-forma

$$\omega = (zx^2 - y^3)dx - (z^3 - xy^2)dy + (yz^2 - x^3)dz$$

Então, $\mathcal{F}$ não admite curva algébrica invariante.

Demonstração.

Pode-se mostrar que $\mathcal{F}$ é não dicritica. O campo de Darboux definindo $\mathcal{F}$ é dado por $v = z^2\partial_x + x^2\partial_y + y^2\partial_z$. Usando o software Singular resulta

$$\Delta_{\mathcal{F}_5} = i_{v^5}\omega = x^5z^4 + x^4y^5 + 2x^3y^3z^3 + y^4z^5$$

é irredutível em $\mathbb{F}_5[x, y, z]$. $\square$

Removendo não dicricidade

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é não degenerada se

$$\#\operatorname{sing}(\mathcal{F}) = d^2 + d + 1.$$

Removendo não dicricidade

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é não degenerada se

$$\#\operatorname{sing}(\mathcal{F}) = d^2 + d + 1.$$

Observação

É possivel mostrar que $\mathcal{F}$ é não degenerada implica que para todo $Q \in \mathcal{F}$ existe um aberto U em torno de Q tal que a folheação é definida por um campo $v = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y$ com $Jv_1(Q)$ invertível.

Removendo não dicricidade

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é não degenerada se

$$\# \operatorname{sing}(\mathcal{F}) = d^2 + d + 1.$$

Observação

É possivel mostrar que $\mathcal{F}$ é não degenerada implica que para todo $Q \in \mathcal{F}$ existe um aberto U em torno de Q tal que a folheação é definida por um campo $v = a(x,y)\partial_x + b(x,y)\partial_y$ com $Jv_1(Q)$ invertível.

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$. Dado $Q \in \operatorname{sing}(\mathcal{F})$ denote por $\alpha_Q :=$ quociente dos autovalores associados a matriz $Jv_1(Q)$.

$$\alpha^+_{\mathcal{F}} := \sup\{|\alpha_Q| \mid Q \in \operatorname{sing}(\mathcal{F})\} \quad \alpha^-_{\mathcal{F}} := \sup\{|\alpha_Q|^{-1} \mid Q \in \operatorname{sing}(\mathcal{F})\}$$

$$\beta_{\mathcal{F}} = \alpha^+_{\mathcal{F}} + \alpha^-_{\mathcal{F}} + 2$$

Irredutibilidade e não algebricidade II

Proposição

Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ ***reduzida****. Suponha que $\mathcal{F}$ está definida por uma 1-forma primitiva ω sobre $\mathbb{Z}$. Seja $p \in \mathbb{Z}$ inteiro primo tal que*

- $p > 2d\beta_{\mathcal{F}}^{\frac{1}{2}}$.
- $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ *é irredutível.*

Então, $\mathcal{F}$ não admite soluções algébricas.

Irredutibilidade e não algebricidade II

Proposição

*Seja $\mathcal{F} \in \mathbb{F}ol_d(\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}})$ **reduzida**. Suponha que $\mathcal{F}$ está definida por uma 1-forma primitiva ω sobre $\mathbb{Z}$. Seja $p \in \mathbb{Z}$ inteiro primo tal que*

- $p > 2d\beta_{\mathcal{F}}^{\frac{1}{2}}$.
- $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ *é irredutível.*

Então, $\mathcal{F}$ não admite soluções algébricas.

O ponto crucial no argumento consite em provar que se existir uma solução algébrica para $\mathcal{F}$ então existe uma curva $\{F = 0\} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ invariante por $\mathcal{F}$ com $F \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ irredutível e tal que $F \otimes \mathbb{F}_p$ **não é um p-fator**. Podemos garantir isso usando o teorema do índice de Camacho-Sad:

$$C^2 = \sum_{Q \in \mathrm{sing}(\mathcal{F}) \cap C} CS(\mathcal{F}, C; Q)$$

Alguns problemas

Seja $\mathcal{F}$ uma folhação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível para uma infinidade de primos p não é difícil verificar que $\mathcal{F}$ não admite soluções algébricas.

Alguns problemas

Seja $\mathcal{F}$ uma folhação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível para uma infinidade de primos p não é difícil verificar que $\mathcal{F}$ não admite soluções algébricas.

Problema (I)

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ não degenerada com quociente de autovalores não racional. Suponha que $\mathcal{F}$ não admite soluções algébricas.

- *$\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível para uma infinidade de primos p?*

Alguns problemas

Seja $\mathcal{F}$ uma folhação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível para uma infinidade de primos p não é difícil verificar que $\mathcal{F}$ não admite soluções algébricas.

Problema (I)

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ não degenerada com quociente de autovalores não racional. Suponha que $\mathcal{F}$ não admite soluções algébricas.

- *$\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível para uma infinidade de primos p?*

Problema (II)

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau 2 em $\mathbb{P}^2_k$ com k de característica $p > 3$. Suponha que $\mathcal{F}$ não admita retas invariantes e que exista C uma curva irredutível de grau $d_C < p$ que é $\mathcal{F}$-invariante. É verdade que $\operatorname{sing}(C) \subset \operatorname{sing}(\mathcal{F})$?

k vs $\mathbb{C}$

Sobre $\mathbb{C}$ a inclusão $\mathrm{sing}(C) \subset \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ é conhecida. Por outro lado,

k vs $\mathbb{C}$

Sobre $\mathbb{C}$ a inclusão $\mathrm{sing}(C) \subset \mathrm{sing}(\mathcal{F})$ é conhecida. Por outro lado,

Exemplo

Seja k um corpo de característica $p = 3$. Considere a folheação em $\mathbb{P}^2_k$ definida pela 1-forma projetiva

$$\omega = zx^2(y^2z + x^3)dx - z^6dy + (yz^5 - x^6 - x^3y^2z)dz$$

Então, $\mathcal{Z}(y^2z + x^3) \subset \mathbb{P}^2_k$ é invariante por $\mathcal{F}$ e é tal que

$$sing(C) = \{[0:0:1]\} \not\subset sing(\mathcal{F}) = \{[0:1:0]\}.$$

k vs $\mathbb{C}$

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Então $\#sing(\mathcal{F}) > 0$.

k vs $\mathbb{C}$

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$. Então $\#sing(\mathcal{F}) > 0$.

Proposição

Seja k um corpo de característica $p > 0$. Então, existem folheações em $\mathbb{P}^2_k$ de grau $p - 2$ que são lisas.

Demonstração.

Seja $C = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{P}^2_k$ uma curva irredutível lisa de grau p em $\mathbb{P}^2_k$. A fórmula de Euler implica que

$$\omega := dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

define uma folheação lisa em $\mathbb{P}^2_k$ de grau $p - 2$. □

Exemplo

Seja d um inteiro tal que $p|d$ e considere a C a curva em $\mathbb{P}^2_k$ descrita pelo polinômio

$$F = x^{d-1}y + y^{d-1}z + xz^{d-1}$$

Seja $\mathcal{F}$ a folheação definida por dF. Temos que $\mathcal{F}$ é uma folheação lisa de grau $d-2$ e admite C como uma curva $\mathcal{F}$-invariante não singular de grau d.

Exemplo

Seja d um inteiro tal que $p|d$ e considere a C a curva em $\mathbb{P}^2_k$ descrita pelo polinômio

$$F = x^{d-1}y + y^{d-1}z + xz^{d-1}$$

Seja $\mathcal{F}$ a folheação definida por dF. Temos que $\mathcal{F}$ é uma folheação lisa de grau $d-2$ e admite C como uma curva $\mathcal{F}$-invariante não singular de grau d.

Observação

O problema sobre a continencia $\operatorname{sing}(C) \subset \operatorname{sing}(\mathcal{F})$ admite aplicações interessantes. Uma reposta afirmativa implica:

Exemplo

Seja d um inteiro tal que $p|d$ e considere a C a curva em $\mathbb{P}_k^2$ descrita pelo polinômio

$$F = x^{d-1}y + y^{d-1}z + xz^{d-1}$$

Seja $\mathcal{F}$ a folheação definida por dF. Temos que $\mathcal{F}$ é uma folheação lisa de grau $d-2$ e admite C como uma curva $\mathcal{F}$-invariante não singular de grau d.

Observação

O problema sobre a continencia $\operatorname{sing}(C) \subset \operatorname{sing}(\mathcal{F})$ admite aplicações interessantes. Uma reposta afirmativa implica:

- *Uma folheação genérica em $\mathbb{P}_k^2$ de grau d tem p-curvatura reduzida.*

Exemplo

Seja d um inteiro tal que $p|d$ e considere a C a curva em $\mathbb{P}^2_k$ descrita pelo polinômio

$$F = x^{d-1}y + y^{d-1}z + xz^{d-1}$$

Seja $\mathcal{F}$ a folheação definida por dF. Temos que $\mathcal{F}$ é uma folheação lisa de grau $d-2$ e admite C como uma curva $\mathcal{F}$-invariante não singular de grau d.

Observação

O problema sobre a continencia $\operatorname{sing}(C) \subset \operatorname{sing}(\mathcal{F})$ admite aplicações interessantes. Uma reposta afirmativa implica:

- *Uma folheação genérica em $\mathbb{P}^2_k$ de grau d tem p-curvatura reduzida.*
- *Problema I admite resposta positiva para folheações de grau 2.*

Referências

- Mattei, J.-F.; Moussu, R. Holonomie et intégrales premières. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 13 (1980), no. 4, 469–523.
- Cerveau, D.; Lins Neto, A. Holomorphic foliations in $\mathbf{C}P(2)$ having an invariant algebraic curve. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 41 (1991), no. 4, 883–903.
- Carnicer, Manuel M. The Poincaré problem in the nondicritical case. Ann. of Math. (2) 140 (1994), no. 2, 289–294.
- Ekedahl, Shepherd-Barron, Taylor. A conjecture on the existence of compact leaves of algebraic foliations. Shepherd-Baron's homepage. 1999;1(3):3-1.
- Pereira, Jorge Vitório. Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields. J. Pure Appl. Algebra 171 (2002), no. 2-3, 295–301.

Referências

- Esteves, Eduardo. The Castelnuovo-Mumford regularity of an integral variety of a vector field on projective space. Math. Res.Lett.9 (2002), no.1, 1–15.
- Coutinho, S. C. A constructive proof of the density of algebraic Pfaff equations without algebraic solutions. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 57 (2007), no. 5, 1611–1621.
- Serre, Jean-Pierre. How to use finite fields for problems concerning infinite fields. Arithmetic, geometry, cryptography and coding theory, 183–193, Contemp. Math., 487, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009.
- Pereira, Jorge Vitório. Algebraic separatrices for non-dicritical foliations on projective spaces of dimension at least four. Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 113 (2019), no. 4, 3921–3929.

Obrigado!!!