Folheações de codimensão um em característica positiva e aplicações

Wodson Mendson

IMPA

28 de janeiro de 2022

Folheações em variedades algébricas

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}$,$\overline{\mathbb{F}}_p$)

Folheações em variedades algébricas

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}}_p$)

Definição

Seja X uma variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k. *Uma* ***folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um*** *em X consiste em um subfeixe coerente $T_{\mathcal{F}} \subset T_X$ de posto* $\dim X - 1$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *$T_{\mathcal{F}}$ é fechado por colchete de Lie,*
- *O quociente $T_X/T_{\mathcal{F}}$ é livre de torção, isto é, $T_{\mathcal{F}}$ é saturado em T_X.*

Folheações em variedades algébricas

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}}_p$)

Definição

Seja X uma variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k. *Uma **folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um** em X consiste em um subfeixe coerente $T_{\mathcal{F}} \subset T_X$ de posto* $\dim X - 1$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *$T_{\mathcal{F}}$ é fechado por colchete de Lie,*
- *O quociente $T_X/T_{\mathcal{F}}$ é livre de torção, isto é, $T_{\mathcal{F}}$ é saturado em T_X.*

O conjunto singular de $\mathcal{F}$ é definido pondo

$$\mathrm{sing}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid (T_X/T_{\mathcal{F}})_x \text{ não é um } \mathcal{O}_{X,x}\text{-módulo livre}\}.$$

Folheações em variedades algébricas

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em X.

- **Feixe normal** de $\mathcal{F}$:

$$N_{\mathcal{F}} = (T_X/T_{\mathcal{F}})^{**}$$

- **Feixe conormal** de $\mathcal{F}$:

$$\Omega^1_{X/\mathcal{F}} = \{\omega \in \Omega^1_{X/k} \mid i_v\omega = 0 \quad \forall v \in T_{\mathcal{F}}\} \cong N^*_{\mathcal{F}}$$

Folheações em variedades algébricas

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em X.

- **Feixe normal** de $\mathcal{F}$:

$$N_{\mathcal{F}} = (T_X/T_{\mathcal{F}})^{**}$$

- **Feixe conormal** de $\mathcal{F}$:

$$\Omega^1_{X/\mathcal{F}} = \{\omega \in \Omega^1_{X/k} \mid i_v\omega = 0 \quad \forall v \in T_{\mathcal{F}}\} \cong N^*_{\mathcal{F}}$$

A inclusão de $N^*_{\mathcal{F}}$ em $\Omega^1_{X/k}$ determina uma seção global não nula $\omega \in \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_{X/k} \otimes N_{\mathcal{F}})$ com zeros de codimensão pelo menos dois. Como $T_{\mathcal{F}}$ é estável por colchete de Lie temos que $\omega \wedge d\omega = 0$. Reciprocamente, se ω é uma seção global de $\Omega^1_{X/k} \otimes \mathcal{I}$ para algum feixe invertível $\mathcal{I}$, com zeros de codimensão pelo menos dois e integrável então obtemos um subfeixe saturado de T_X e fechado por colchete de Lie considerando o núcleo do mapa contração por ω

$$\gamma_\omega : T_X \longrightarrow \mathcal{I}$$

Folheações em variedades algébricas: definição II

Definição

Seja $\mathcal{I}$ um feixe invertível em X. Uma folheação de codimensão um em X com feixe normal $\mathcal{I}$ é determinada por uma seção global não nula $\omega \in \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_{X/k} \otimes \mathcal{I})$ satisfazendo as seguintes condições

- $\omega \wedge d\omega = 0$,
- $\operatorname{codim} \operatorname{sing}(\omega) \geq 2$.

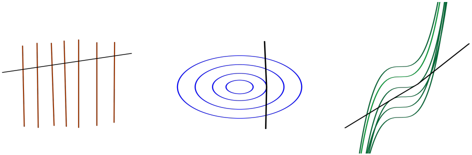
Folheações em variedades algébricas: definição II

Definição

Seja $\mathcal{I}$ um feixe invertível em X. Uma folheação de codimensão um em X com feixe normal $\mathcal{I}$ é determinada por uma seção global não nula $\omega \in \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_{X/k} \otimes \mathcal{I})$ satisfazendo as seguintes condições

- $\omega \wedge d\omega = 0$,
- $\operatorname{codim} \operatorname{sing}(\omega) \geq 2$.

Quando $X = \mathbb{P}^n_k$ as folheações de codimensão um em X admitem uma representação bem explícita. Dada uma tal folheação podemos associar **grau**.



Folheações de codimensão um em espaços projetivos

Usando a sequência exata de Euler para espaços projetivos

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k} \longrightarrow 0$$

percebe-se que uma folheação de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^n_k$ é determinada por uma 1-forma homogênea em $\mathbb{A}^{n+1}_k$

$$\sigma = A_0 dx_0 + \cdots + A_n dx_n$$

Folheações de codimensão um em espaços projetivos

Usando a sequência exata de Euler para espaços projetivos

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}}(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}} \longrightarrow 0$$

percebe-se que uma folheação de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ é determinada por uma 1-forma homogênea em $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}$

$$\sigma = A_0 dx_0 + \cdots + A_n dx_n$$

onde $A_0 \ldots, A_n \in \mathrm{k}[x_0, \ldots, x_n]$ são polinômios homogêneos de grau $d+1$ e tal que $\mathrm{sing}(\sigma) = \mathcal{Z}(A_0 \ldots, A_n)$ tem codimensão maior que um e com σ satisfazendo as seguintes condições

$$i_R\sigma = \sum_i A_i x_i = 0 \qquad \sigma \wedge d\sigma = 0.$$

Folheações de codimensão um em espaços projetivos

A condição de integrabilidade se traduz em uma serie de equações:

$$A_i\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_l}\right)+A_j\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_l}-\frac{\partial A_l}{\partial x_i}\right)+A_l\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)=0$$

para $0 \leq i < j < l \leq n$.

Folheações de codimensão um em espaços projetivos

A condição de integrabilidade se traduz em uma serie de equações:

$$A_i\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_l}\right)+A_j\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_l}-\frac{\partial A_l}{\partial x_i}\right)+A_l\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)=0$$

para $0 \leq i < j < l \leq n$.

O espaço de folheações de codimensão um e grau $d \geq 0$ em $\mathbb{P}^n_k$ $(n \geq 2)$ é denotado por

$$\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^n_k) = \{[\omega] \in \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^n_k, \Omega^1_{\mathbb{P}^n_k} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_k}(d+2))) \mid \omega \wedge d\omega = 0 \text{ e} \operatorname{codim} \operatorname{sing}(\omega) \geq 2\}.$$

Folheações de codimensão um em espaços projetivos

A condição de integrabilidade se traduz em uma serie de equações:

$$A_i\left(\frac{\partial A_l}{\partial x_j}-\frac{\partial A_j}{\partial x_l}\right)+A_j\left(\frac{\partial A_i}{\partial x_l}-\frac{\partial A_l}{\partial x_i}\right)+A_l\left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i}-\frac{\partial A_i}{\partial x_j}\right)=0$$

para $0\leq i<j<l\leq n$.

O espaço de folheações de codimensão um e grau $d\geq 0$ em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ $(n\geq 2)$ é denotado por

$$\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}})=\{[\omega]\in\mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}},\Omega^1_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}}(d+2)))\mid\omega\wedge d\omega=0 \text{ e codim sing}(\omega)\geq 2\}.$$

Problema

Descrever as componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}})$.

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

Nessa exposição, mostramos como usar folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

[1] Codimension one foliations of degree three on projective spaces

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

Nessa exposição, mostramos como usar folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Seja $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grau um.

[1] Codimension one foliations of degree three on projective spaces

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

Nessa exposição, mostramos como usar folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Seja $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grau um.

Dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seja $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\Psi_{(d;d_1,d_2)} : \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$$

$$(\Phi, \mathcal{G}) \longmapsto \Phi^* \mathcal{G}$$

[1] Codimension one foliations of degree three on projective spaces

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

Nessa exposição, mostramos como usar folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Seja $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grau um.

Dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seja $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\Psi_{(d;d_1,d_2)} : \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$$

$$(\Phi, \mathcal{G}) \longmapsto \Phi^*\mathcal{G}$$

Teorema A

Seja $C_{(d;d_1,d_2)}$ a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$. Então, $C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

[1] Codimension one foliations of degree three on projective spaces

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

Nessa exposição, mostramos como usar folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Seja $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grau um.

Dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seja $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\Psi_{(d;d_1,d_2)} : \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$$

$$(\Phi, \mathcal{G}) \longmapsto \Phi^*\mathcal{G}$$

Teorema A

Seja $C_{(d;d_1,d_2)}$ a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$. Então, $C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

O resultado generaliza uma componente encontrada em grau $d = 3$ por R.C Costa, R. Lizarbe e J.V Pereira. [1]

[1] Codimension one foliations of degree three on projective spaces

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de caracterísica $p > 0$.

R = k-domínio (exemplo: $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n], \mathrm{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$)

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de caracterísica $p > 0$.

R = k-domínio (exemplo: $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n], \mathrm{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$)

Sejam v, v_1 e v_2 k-derivações de R. Então valem as seguintes propriedades

- O p-iterado de v , v^p, é uma k-derivação,

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de caracterísica $p > 0$.

R = k-domínio (exemplo: $R = k[x_1, ..., x_n], k[[x_1, \ldots, x_n]]$)

Sejam v, v_1 e v_2 k-derivações de R. Então valem as seguintes propriedades

- O p-iterado de v , v^p, é uma k-derivação,
- Se v_1, v_2 são k-derivações de R então

$$(v_1 + v_2)^p = v_1^p + v_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(v_1, v_2)$$

com $s_i(v_1, v_2)$ na álgebra de Lie gerada por v_1, v_2,

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de caracterísica $p > 0$.

R = k-domínio (exemplo: $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n], \mathrm{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$)

Sejam v, v_1 e v_2 k-derivações de R. Então valem as seguintes propriedades

- O p-iterado de v , v^p, é uma k-derivação,
- Se v_1, v_2 são k-derivações de R então

$$(v_1 + v_2)^p = v_1^p + v_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(v_1, v_2)$$

  com $s_i(v_1, v_2)$ na álgebra de Lie gerada por v_1, v_2,
- Para qualquer $f \in R$ temos

$$(fv)^p = f^p v^p + fv^{p-1}(f)v.$$

Folheações p-fechadas

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma variedade algébrica não singular X definida sobre k. *Dizemos que $\mathcal{F}$ é* ***p-fechada*** *se $T_{\mathcal{F}}$ é estável por p-potências.*

[2] **Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff**

Folheações p-fechadas

Definição

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma variedade algébrica não singular X definida sobre k. Dizemos que $\mathcal{F}$ é p-**fechada** se $T_{\mathcal{F}}$ é estável por p-potências.*

As folheações p-fechadas são a versão em característica positiva das folheações holomorfas que admitem uma integral primeira meromorfa. Vale em particular o seguinte teorema.[2]

[2] **Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff**

Folheações p-fechadas

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma variedade algébrica não singular X definida sobre k. Dizemos que $\mathcal{F}$ é ***p-fechada*** *se $T_{\mathcal{F}}$ é estável por p-potências.*

As folheações p-fechadas são a versão em característica positiva das folheações holomorfas que admitem uma integral primeira meromorfa. Vale em particular o seguinte teorema.[2]

Teorema (Brunella-Nicolau)

Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre k e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um. Então, $\mathcal{F}$ é p-fechada se e só se existe uma infinidade de hipersuperfícies $\mathcal{F}$-invariantes.

[2] Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff

Por outro lado, cuidado![3]

[3] **Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields**

Por outro lado, cuidado![3]

Proposição (J.V.Pereira)

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_k$ e suponha que $\deg(\mathcal{F}) < p - 1$. *Então, $\mathcal{F}$ admite uma curva algébrica $\mathcal{F}$-invariante.*

[3] **Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields**

Por outro lado, cuidado![3]

Proposição (J.V.Pereira)

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_k$ e suponha que $\deg(\mathcal{F}) < p - 1$. Então, $\mathcal{F}$ admite uma curva algébrica $\mathcal{F}$-invariante.

Exemplo

Sejam k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e $\mathcal{F}$ a folheação em $\mathbb{A}^2_k$ definida pela a 1-forma

$$\omega = ydx - \alpha xdy$$

para algum $\alpha \in k^*$. Então, $\mathcal{F}$ é p-fechada se e somente se $\alpha \in \mathbb{F}_p$.

Note inicialmente que um campo v é tangente a $\mathcal{F}$ se e somente se $v = g \cdot v_1$ para algum polinômio $g \in k[x, y]$ onde $v_1 = \alpha x\partial_x + y\partial_y$. Agora, note que v_1 é tangente a folheação definida por ω e que $v_1^p = \alpha^p x\partial_x + y\partial_y$.

[3] **Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields**

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de caracterísitca $p > 0$
- $R = k$-domínio local regular que é localização de um k-domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- $t_1, \ldots, t_r$ = um sistema de parâmetros de R.

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de caracterísitca $p > 0$
- $R = k$-domínio local regular que é localização de um k-domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- $t_1, \ldots, t_r$ = um sistema de parâmetros de R.

Do sistema de parâmetos obtemos $\{dt_1, \ldots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega^1_{R/\mathrm{k}}$. Temos ainda que R é um R^p-módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$ para todo i.

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de caracterísitca $p > 0$
- R = k-domínio local regular que é localização de um k-domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- $t_1, \ldots, t_r$ = um sistema de parâmetros de R.

Do sistema de parâmetos obtemos $\{dt_1, \ldots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega^1_{R/\mathrm{k}}$. Temos ainda que R é um R^p-módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$ para todo i.

- **1-formas fechadas:**

$$Z^1_{R/k} = \{\omega \in \Omega^1_{R/k} \mid d\omega = 0\}$$

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de caracterísitca $p > 0$
- R = k-domínio local regular que é localização de um k-domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- $t_1, \ldots, t_r$ = um sistema de parâmetros de R.

Do sistema de parâmetos obtemos $\{dt_1, \ldots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega^1_{R/\mathrm{k}}$. Temos ainda que R é um R^p-módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$ para todo i.

- **1-formas fechadas:**

$$Z^1_{R/k} = \{\omega \in \Omega^1_{R/k} \mid d\omega = 0\}$$

- **1-formas exatas:**

$$B^1_{R/k} = \{\omega \in \Omega^1_{R/k} \mid \omega = dg\}$$

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de caracterísitca $p > 0$
- $R = k$-domínio local regular que é localização de um k-domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- $t_1, \ldots, t_r$ = um sistema de parâmetros de R.

Do sistema de parâmetos obtemos $\{dt_1, \ldots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega^1_{R/\,\mathrm{k}}$. Temos ainda que R é um R^p-módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$ para todo i.

- **1-formas fechadas:**

$$Z^1_{R/k} = \{\omega \in \Omega^1_{R/k} \mid d\omega = 0\}$$

- **1-formas exatas:**

$$B^1_{R/k} = \{\omega \in \Omega^1_{R/k} \mid \omega = dg\}$$

- **Obstrução:**

$$H^1_{R/k} = Z^1_{R/k} / B^1_{R/k}$$

Operador de Cartier

Considere o R^p-módulo

$$M(t_1, \ldots, t_r) = R^p t_1^{p-1} dt_1 \oplus \cdots \oplus R^p t_r^{p-1} dt_r$$

Proposição

Todo elemento de $Z^1_{R/k}$ se escreve de modo único como $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ com $\sigma_1 \in B^1_{R/k}$ e $\sigma_2 \in M(t_1, \ldots, t_r)$.

Operador de Cartier

Considere o R^p-módulo

$$M(t_1, \ldots, t_r) = R^p t_1^{p-1} dt_1 \oplus \cdots \oplus R^p t_r^{p-1} dt_r$$

Proposição

Todo elemento de $Z^1_{R/k}$ se escreve de modo único como $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ com $\sigma_1 \in B^1_{R/k}$ e $\sigma_2 \in M(t_1, \ldots, t_r)$.

O **Operador de Cartier** é o mapa

$$\mathbf{C} \colon Z^1_{R/k} \longrightarrow \Omega^1_{R/k}$$
$$dg + \sum_{i=1}^{r} u_i^p t_i^{p-1} dt_i \mapsto \sum_{i=1}^{r} u_i dt_i$$

Fórmula fundamental

O **Operador de Cartier** pode ser definido de maneira mais explícita considerando inversa do isomorfismo[4]

$$\gamma\colon \Omega^1_{R/\,k} \longrightarrow Z^1_{R/\,k} \longrightarrow H^1_{R/\,k}$$
$$adt \mapsto a^p t^{p-1} dt \mapsto [a^p t^{p-1} dt].$$

[4] 1.3.4 Theorem em **Frobenius splitting methods in geometry and representation theory**

Fórmula fundamental

O **Operador de Cartier** pode ser definido de maneira mais explícita considerando inversa do isomorfismo[4]

$$\begin{aligned} \gamma\colon \Omega^1_{R/\,k} &\longrightarrow Z^1_{R/\,k} \longrightarrow H^1_{R/\,k} \\ adt &\mapsto a^p t^{p-1} dt \mapsto [a^p t^{p-1} dt]. \end{aligned}$$

Teorema

Seja $\omega \in \Omega^1_{R/k}$ uma 1-forma fechada e $v \in \mathrm{Der}_k(R)$ uma derivação. Então,

$$i_v\, \boldsymbol{C}(\omega)^p = i_{v^p}\omega - v^{p-1}(i_v\omega).$$

[4] 1.3.4 Theorem em **Frobenius splitting methods in geometry and representation theory**

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre* k *e denote por $\mathcal{Z}^1_{X/k}$ o subfeixe de $\Omega^1_{X/k}$ formado pelas 1-formas fechadas. Existe um operador, chamado o* ***Operador de Cartier****, $\boldsymbol{C} : \mathcal{Z}^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$ unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre* k *e denote por $\mathcal{Z}^1_{X/k}$ o subfeixe de $\Omega^1_{X/k}$ formado pelas 1-formas fechadas. Existe um operador, chamado o* ***Operador de Cartier***, $\boldsymbol{C} : \mathcal{Z}^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$ *unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

1. $\boldsymbol{C}(\sigma_1 + \sigma_2) = \boldsymbol{C}(\sigma_1) + \boldsymbol{C}(\sigma_2)$,

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre* k *e denote por $\mathcal{Z}^1_{X/k}$ o subfeixe de $\Omega^1_{X/k}$ formado pelas* 1*-formas fechadas. Existe um operador, chamado o* ***Operador de Cartier***, $\boldsymbol{C} : \mathcal{Z}^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$ *unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

1. $\boldsymbol{C}(\sigma_1 + \sigma_2) = \boldsymbol{C}(\sigma_1) + \boldsymbol{C}(\sigma_2)$,
2. $\boldsymbol{C}(f^p \sigma_1) = f\, \boldsymbol{C}(\sigma_1)$,

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre* k *e denote por $\mathcal{Z}^1_{X/k}$ o subfeixe de $\Omega^1_{X/k}$ formado pelas 1-formas fechadas. Existe um operador, chamado o* ***Operador de Cartier***, $\boldsymbol{C} : \mathcal{Z}^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$ *unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

1. $\boldsymbol{C}(\sigma_1 + \sigma_2) = \boldsymbol{C}(\sigma_1) + \boldsymbol{C}(\sigma_2)$,
2. $\boldsymbol{C}(f^p \sigma_1) = f\, \boldsymbol{C}(\sigma_1)$,
3. $\boldsymbol{C}(df) = 0$,

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre* k *e denote por $\mathcal{Z}^1_{X/k}$ o subfeixe de $\Omega^1_{X/k}$ formado pelas* 1*-formas fechadas. Existe um operador, chamado o **Operador de Cartier**, $\boldsymbol{C} : \mathcal{Z}^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$ unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

1. $\boldsymbol{C}(\sigma_1 + \sigma_2) = \boldsymbol{C}(\sigma_1) + \boldsymbol{C}(\sigma_2)$,
2. $\boldsymbol{C}(f^p \sigma_1) = f\, \boldsymbol{C}(\sigma_1)$,
3. $\boldsymbol{C}(df) = 0$,
4. $\boldsymbol{C}(f^{p-1} df) = df$,

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular sobre definida sobre* k *e denote por $\mathcal{Z}^1_{X/k}$ o subfeixe de $\Omega^1_{X/k}$ formado pelas 1-formas fechadas. Existe um operador, chamado o* ***Operador de Cartier****, $\boldsymbol{C} : \mathcal{Z}^1_{X/k} \longrightarrow \Omega^1_{X/k}$ unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

1. $\boldsymbol{C}(\sigma_1 + \sigma_2) = \boldsymbol{C}(\sigma_1) + \boldsymbol{C}(\sigma_2)$,
2. $\boldsymbol{C}(f^p \sigma_1) = f\, \boldsymbol{C}(\sigma_1)$,
3. $\boldsymbol{C}(df) = 0$,
4. $\boldsymbol{C}(f^{p-1} df) = df$,
5. $\boldsymbol{C}(\frac{df}{f}) = \frac{df}{f}$

para quaisquer seções locais $f \in \mathcal{O}_X$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{Z}^1_{X/k}$.

[a] **Seshadri, L'opération de Cartier**

Folheações não p-fechadas e a p-distribuição associada

- X = variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k
- $\mathcal{F}$ = folheação de codimensão um não p-fechada em X

Folheações não p-fechadas e a p-distribuição associada

- X = variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k
- $\mathcal{F}$ = folheação de codimensão um não p-fechada em X

Teorema (D. Cerveau, A. Lins Neto, F. Loray, J.V. Pereira, F. Touzet)

Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre k *e ω uma 1-forma racional. Suponha que ω é integrável e que v é um campo racional tal que $i_v\omega = 0$. Se $f = i_{v_p}\omega \neq 0$ então $d(f^{p-1}\omega) = 0$.*[a]

[a] **Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences**

Folheações não p-fechadas e a p-distribuição associada

- X = variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k
- $\mathcal{F}$ = folheação de codimensão um não p-fechada em X

Teorema (D. Cerveau, A. Lins Neto, F. Loray, J.V. Pereira, F. Touzet)

Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre k *e ω uma 1-forma racional. Suponha que ω é integrável e que v é um campo racional tal que $i_v\omega = 0$. Se $f = i_{v_p}\omega \neq 0$ então $d(f^{p-1}\omega) = 0$.*[a]

[a] Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences

Seja ω uma 1-forma fechada definindo $\mathcal{F}$. Considere o subfeixe $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ de $T_{\mathcal{F}}$ definido pondo

$$\boxed{T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} = \{v \in T_{\mathcal{F}} \mid i_v\, \mathbf{C}(\omega) = 0\}} \tag{1}$$

onde $\mathbf{C}$ é o Operador de Cartier.

Morfismo p-curvatura

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo $\mathcal{F}$ e é um subfeixe saturado em T_X.

Morfismo p-curvatura

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo $\mathcal{F}$ e é um subfeixe saturado em T_X.

Definição

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um não p-fechada em X. A p-distribuição associada a $\mathcal{F}$ é a distribuição definida pelo feixe $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ e será chamada de **p-distribuição** associada a $\mathcal{F}$.*

Morfismo p-curvatura

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo $\mathcal{F}$ e é um subfeixe saturado em T_X.

Definição

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um não p-fechada em X. A p-distribuição associada a $\mathcal{F}$ é a distribuição definida pelo feixe $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ e será chamada de **p-distribuição** associada a $\mathcal{F}$.*

Exemplo

A fórmula fundamental implica que se $\dim X = 2$ então $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é o feixe nulo. De fato, dado $v \in T_{\mathcal{F}}$ temos que $0 \neq i_{v^p}\omega = i_v\, \boldsymbol{C}(\omega)^p$.

Morfismo p-curvatura

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo $\mathcal{F}$ e é um subfeixe saturado em T_X.

Definição

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um não p-fechada em X. A p-distribuição associada a $\mathcal{F}$ é a distribuição definida pelo feixe $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ e será chamada de p-**distribuição** associada a $\mathcal{F}$.*

Exemplo

A fórmula fundamental implica que se $\dim X = 2$ então $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é o feixe nulo. De fato, dado $v \in T_{\mathcal{F}}$ temos que $0 \neq i_{v^p}\omega = i_v\, \boldsymbol{C}(\omega)^p$.

Considere o seguinte morfismo de feixes de conjuntos

$$\psi_{\mathcal{F}} \colon T_{\mathcal{F}} \longrightarrow \frac{T_X}{T_{\mathcal{F}}}$$

que associa v em $v^p \mod T_{\mathcal{F}}$.

Morfismo p-curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Morfismo p-curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Definição

*O **morfismo p-curvatura associado a** $\mathcal{F}$ é o mapa de $\mathcal{O}_X$-módulos:*

$$\varphi_{\mathcal{F}} \colon F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}}$$
$$\sum_i f_i \otimes v_i \mapsto \sum_i f_i v_i^p .$$

Morfismo p-curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Definição

*O **morfismo p-curvatura associado a** $\mathcal{F}$ é o mapa de $\mathcal{O}_X$-módulos:*

$$\varphi_{\mathcal{F}} \colon F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}}$$
$$\sum_i f_i \otimes v_i \mapsto \sum_i f_i v_i^p.$$

Nas condições acima, a folheação $\mathcal{F}$ é p-fechada se e somente se $\varphi_{\mathcal{F}} \equiv 0$.

Morfismo p-curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Definição

*O **morfismo p-curvatura associado a $\mathcal{F}$** é o mapa de $\mathcal{O}_X$-módulos:*

$$\varphi_{\mathcal{F}}\colon F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}}$$
$$\sum_i f_i \otimes v_i \mapsto \sum_i f_i v_i^p.$$

Nas condições acima, a folheação $\mathcal{F}$ é p-fechada se e somente se $\varphi_{\mathcal{F}} \equiv 0$.

Lembrar: O morfismo **Frobenius absoluto**, denotado por F_X, consiste no morfismo que é identidade a nível de espaços topológicos e a nível de funções é o morfismo de anéis p-potência

$$F_X = (f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

onde $f = id$ e $f^{\#} : a \mapsto a^p$.

Morfismo p-curvatura

Considere o morfismo p-curvatura

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{F}} \colon F_X^* T_{\mathcal{F}} &\longrightarrow N_{\mathcal{F}} \\ \sum_i f_i \otimes v_i &\mapsto \sum_i f_i v_i^p. \end{aligned}$$

Morfismo p-curvatura

Considere o morfismo p-curvatura

$$\varphi_{\mathcal{F}} \colon F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}}$$
$$\sum_i f_i \otimes v_i \mapsto \sum_i f_i v_i^p.$$

Proposição

Temos $\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathcal{F}}) = F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ *onde* F_X *é o mapa Frobenius absoluto e existe um divisor efetivo* $\Delta_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Div}(X)$ *tal que a sequencia*

$$0 \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-\Delta_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0$$

é exata em codimensão um, isto é, fora de um conjunto fechado de codimensão ≥ 2.

Folheações não p-fechadas: p-distribuição e p-divisor

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não p-fechada em X. A ***p-distribuição*** *associada a $\mathcal{F}$ é o subfeixe de T_X definido por $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$. O* ***p-divisor*** *de $\mathcal{F}$ é o divisor $\Delta_{\mathcal{F}}$.*

Uma propriedade interessante do p-divisor está contida na seguinte proposição.

Proposição

Seja X uma variedade não singular sobre k *e $\mathcal{F}$ uma folheação em X não p-fechada. Seja H uma hipersuperfície irredutível em X. Se H é $\mathcal{F}$-invariante então $\mathrm{ord}_H(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$. Reciprocamente, se $\mathrm{ord}_H(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \mod p$ então H é $\mathcal{F}$-invariante.*

Consequências

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em uma variedade projetiva não singular X de dimensão pelo menos dois e definida sobre k. Suponha que $\mathcal{F}$ seja não p-fechada. Então, a identidade

$$\mathcal{O}_X(\Delta_{\mathcal{F}}) = \omega_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \otimes (\omega_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}^{*})^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}}$$

vale em $\mathrm{Pic}(X)$.

Consequências

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em uma variedade projetiva não singular X de dimensão pelo menos dois e definida sobre k. Suponha que $\mathcal{F}$ seja não p-fechada. Então, a identidade

$$\mathcal{O}_X(\Delta_{\mathcal{F}}) = \omega_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \otimes (\omega^*_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}})^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}}$$

vale em $\mathrm{Pic}(X)$.

Quando $X = \mathbb{P}^n_k$ a proposição acima implica que dada $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um não p-fechada e de grau d em $\mathbb{P}^n_k$ temos a seguinte **fórmula do grau:**

$$\boxed{\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = p(d - \deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) - 1) + d + 2} \tag{2}$$

p-divisor e propriedades

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{P}^n_{\mathrm{k}}$ tal que $p \nmid \deg(N_{\mathcal{F}})$. Então, $\mathcal{F}$ admite uma hipersuperfície invariante.

p-divisor e propriedades

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{P}^n_k$ tal que $p \nmid \deg(N_{\mathcal{F}})$. Então, $\mathcal{F}$ admite uma hipersuperfície invariante.

Demonstração.

Seja ω a 1-forma projetiva definindo a folheação $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é p-fechada então $\mathcal{F}$ admite de fato uma infinidade de soluções. Assim, podemos supor que $\mathcal{F}$ é não p-fechada. Como $p \nmid \deg(N_{\mathcal{F}})$ segue da fórmula do grau que $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \mod p$. Em particular, $\Delta_{\mathcal{F}}$ não é um p-fator e assim existe um polinômio irredutível Q ocorrendo em $\Delta_{\mathcal{F}}$ com $\deg(Q) \not\equiv 0 \mod p$. Tal fator, define uma hipersuperfície $\mathcal{F}$-invariante. $\square$

p-divisor e propriedades: exemplo

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida por uma 1-forma projetiva

$$\Omega = Adx + Bdy + Cdz.$$

*Suponha que $A, B, C \in \mathbb{Z}[x,y,z]_{d+1}$ e seja $p\mathbb{Z} \in$ **Spm**$(\mathbb{Z})$ ideal maximal tal que $p \nmid d+2$. Seja $\mathcal{F}_p$ a folheação em $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ obtida por redução módulo $p\mathbb{Z}$ de Ω. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ **é irredutível** então $\mathcal{F}$ **não admite soluções algébricas**.*

[5] **The Poincaré problem in the nondicritical case**

p-divisor e propriedades: exemplo

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida por uma 1-forma projetiva

$$\Omega = Adx + Bdy + Cdz.$$

*Suponha que $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]_{d+1}$ e seja $p\mathbb{Z} \in$ **Spm**$(\mathbb{Z})$ ideal maximal tal que $p \nmid d + 2$. Seja $\mathcal{F}_p$ a folheação em $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ obtida por redução módulo $p\mathbb{Z}$ de Ω. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ **é irredutível** então $\mathcal{F}$ **não admite soluções algébricas**.*

Isso pode ser usado para dar uma simples prova do Teorema de Jouanolou que diz que muitas folheações no pano complexo de grau $d \in \{2, 3\}$ não possuem soluções algébricas. O ponto crucial aqui é uma cota para o grau de soluções algébricas fornecina por Carnicer.[5]

[5] **The Poincaré problem in the nondicritical case**

Exemplo: Folheações em superfícies e o p-divisor

Seja X uma superfície projetiva não singular definida sobre k. Dar uma folheação em X equivale a dar um sistema $\{(U_i, \omega_i, v_i)\}_{i\in I}$ tal que:

- $\{U_i\}_{i\in I}$ é uma cobertura aberta de X.
- Para cada $i \in I$ temos $v_i \in T_X(U_i)$, $\omega_i \in \Omega^1_{X/k}(U_i)$ tais que $i_{v_i}\omega_i = 0$.
- Em $U_i \cap U_j$ temos $\omega_i = f_{ij}\omega_j$ e $v_i = g_{ij}v_j$ para algums funções $f_{ij}, g_{ij} \in \mathcal{O}^*_X(U_{ij})$.
- Para cada $i \in I$ temos $\mathrm{codim}(\omega_i) \geq 2$ e $\mathrm{codim}(v_i) \geq 2$.

Exemplo: Folheações em superfícies e o p-divisor

Seja X uma superfície projetiva não singular definida sobre k. Dar uma folheação em X equivale a dar um sistema $\{(U_i, \omega_i, v_i)\}_{i\in I}$ tal que:

- $\{U_i\}_{i\in I}$ é uma cobertura aberta de X.
- Para cada $i \in I$ temos $v_i \in T_X(U_i)$, $\omega_i \in \Omega^1_{X/k}(U_i)$ tais que $i_{v_i}\omega_i = 0$.
- Em $U_i \cap U_j$ temos $\omega_i = f_{ij}\omega_j$ e $v_i = g_{ij}v_j$ para algums funções $f_{ij}, g_{ij} \in \mathcal{O}^*_X(U_{ij})$.
- Para cada $i \in I$ temos $\mathrm{codim}(\omega_i) \geq 2$ e $\mathrm{codim}(v_i) \geq 2$.

As coleções $\{f_{ij}^{-1}\}, \{g_{ij}\}$ determinam elementos de $H^1(X, \mathcal{O}^*_X) = \mathrm{Pic}(X)$ e os fibrados lineares associados são os fibrado conormal $\Omega^1_{X/\mathcal{F}}$ e fibrado cotangente $\Omega^1_{\mathcal{F}}$ associados a $\mathcal{F}$. Um divisor na classe linear correspondente a $\Omega^1_{\mathcal{F}}$ é chamado de **divisor canônico** de $\mathcal{F}$ e denotado por $K_{\mathcal{F}}$.

Construção explícita do p-divisor

Seja $\mathcal{F} = \{(U_i, \omega_i, v_i)\}$ uma folheação em X que não é p-fechada. Em cada U_{ij} temos relações:

$$\omega_i = f_{ij}\omega_j \qquad\qquad v_i = g_{ij}v_j.$$

Como estamos assumindo que $\mathcal{F}$ é não p-fechada, temos para cada $i, j \in I$,

$$0 \neq i_{v_i^p}\omega_i = i_{(g_{ij}v_j)^p} f_{ij}\omega_j = i_{(g_{ij}^p v_j^p + g_{ij} v_j^{p-1}(g_{ij}^{p-1}) v_j)} f_{ij}\omega_j = g_{ij}^p f_{ij} i_{v_j^p}\omega_j \neq 0.$$

A coleção $\{i_{v_i^p}\omega_i\}_{i\in I}$ determina uma seção $0 \neq s_{\mathcal{F}} \in \mathrm{H}^0(X, (\Omega^1_{\mathcal{F}})^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}})$.

Observação

O p-divisor associado a $\mathcal{F}$ é o divisor de zeros da seção $s_{\mathcal{F}}$:

$$\Delta_{\mathcal{F}} = (s_{\mathcal{F}})_0 \in \mathrm{Div}(X).$$

p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$ e em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica $\mathcal{F}$?

p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$ e em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica $\mathcal{F}$?

Por exemplo, será que muitas folheações em $\mathbb{P}^2_k$ possuem p-divisor reduzido? Irredutível?

p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$ e em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica $\mathcal{F}$?

Por exemplo, será que muitas folheações em $\mathbb{P}^2_k$ possuem p-divisor reduzido? Irredutível?

Nessa direção, temos os seguintes resultados.

Teorema

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d$ e $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Então,

p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$ e em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica $\mathcal{F}$?

Por exemplo, será que muitas folheações em $\mathbb{P}^2_k$ possuem p-divisor reduzido? Irredutível?

Nessa direção, temos os seguintes resultados.

Teorema

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d$ e $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Então,

- *Uma folheação genérica em $\mathbb{P}^2_k$ de grau $d \geq 1$ tem p-divisor reduzido, e*

p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$ e em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica $\mathcal{F}$?

Por exemplo, será que muitas folheações em $\mathbb{P}^2_k$ possuem p-divisor reduzido? Irredutível?

Nessa direção, temos os seguintes resultados.

Teorema

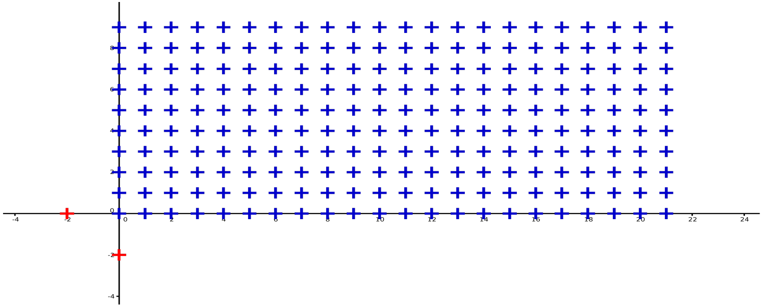
Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d$ e $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Então,

- *Uma folheação genérica em $\mathbb{P}^2_k$ de grau $d \geq 1$ tem p-divisor reduzido, e*
- *Uma folheação genérica em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ com divisor canônico $K \equiv d_1 F + d_2 M$ possui p-divisor não nulo e reduzido.*

Folheações de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Uma folheação em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ será dita **de tipo** (d_1, d_2) se possui divisor canônico de bigrau (d_1, d_2). Os possíveis tipo estão contidos na região:[6]

$$S_0 = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid d_1, d_2 \geq 0\} \cup \{(-2, 0)\} \cup \{(0, -2)\}.$$



[6] Xavier Gómes-Mont, Holomorphic foliations in ruled surfaces

Folheações de dimensão um e grau um p-fechadas

$$\mathbb{V}ec_d(\mathbb{A}_k^{n+1}) = \{[v] \in \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1})) \mid \mathrm{div}(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}))$$

Folheações de dimensão um e grau um p-fechadas

$$\mathbb{V}ec_d(\mathbb{A}_k^{n+1}) = \{[v] \in \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1})) \mid \mathrm{div}(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}))$$

Para cada $\alpha = [\alpha_0 : \cdots : \alpha_n] \in \mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ tal que $\sum_i \alpha_i = 0$ denote por $\mathcal{F}(\alpha)$ a folheação de dimensão um e grau um em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ determinada pelo campo $v(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \partial_{x_i}$ e considere a seguinte subvariedade de $\mathbb{V}ec_1(\mathbb{A}_{\mathrm{k}}^{n+1})$:

$$V(\alpha) = \overline{\{\mathcal{F} \in \mathbb{V}ec_1(\mathbb{A}_{\mathrm{k}}^{n+1}) \mid \mathcal{F} \text{ é conjugada via } \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}) \text{ a } \mathcal{F}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)\}}.$$

Folheações de dimensão um e grau um p-fechadas

$$\mathbb{V}ec_d(\mathbb{A}_k^{n+1}) = \{[v] \in \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1})) \mid \mathrm{div}(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}_k^{n+1}))$$

Para cada $\alpha = [\alpha_0 : \cdots : \alpha_n] \in \mathbb{P}^n_k$ tal que $\sum_i \alpha_i = 0$ denote por $\mathcal{F}(\alpha)$ a folheação de dimensão um e grau um em $\mathbb{P}^n_k$ determinada pelo campo $v(\alpha) = \sum_{i=0}^n \alpha_i x_i \partial_{x_i}$ e considere a seguinte subvariedade de $\mathbb{V}ec_1(\mathbb{A}_k^{n+1})$:

$$V(\alpha) = \overline{\{\mathcal{F} \in \mathbb{V}ec_1(\mathbb{A}_k^{n+1}) \mid \mathcal{F} \text{ é conjugada via } \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k) \text{ a } \mathcal{F}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)\}}.$$

Teorema

Suponha que p não divide $n+1$ e denote por $\mathbb{V}ec_{1,0}(\mathbb{A}_k^{n+1})$ o fechado que consiste das folheações p-fechadas. Se $\alpha = [\alpha_0 : \cdots : \alpha_n] \in \mathbb{P}^n_k(\mathbb{F}_p)$ e $\sum_i \alpha_i = 0$ então $V(\alpha)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{V}ec_{1,0}(\mathbb{A}_k^{n+1})$. Além disso, toda componente irredutível de tal espaço é dessa forma.

Agumas consequências

- Denote por $i(n,p)$ o número de componentes irredutíves de $\mathbb{V}ec_{1,0}(\mathbb{A}_k^{n+1})$. Então,

$$p^{n-1}/(n-1)! \leq i(n,p) \leq p^n$$

Agumas consequências

- Denote por $i(n,p)$ o número de componentes irredutíves de $\mathbb{V}ec_{1,0}(\mathbb{A}_k^{n+1})$. Então,

$$p^{n-1}/(n-1)! \leq i(n,p) \leq p^n$$

- Seja $\mathcal{C}$ uma folheação de dimensão um e grau um em $\mathbb{P}^3_k$. Suponha que $\mathcal{C}$ seja p-fechada e seja $\{\mathcal{C}_t\}_{t\in T}$ uma família de folheações p-fechadas com $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ para algum ponto fechado $0 \in T$. Se $\mathcal{C}$ é definida pela mapa racional

$$\begin{aligned} \Phi\colon\ \mathbb{P}^3_k &\dashrightarrow \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \\ [x_0 : x_1 : y_0 : y_1] &\mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \end{aligned}$$

então existe um aberto U sobre 0 tal que para todo $t \in U$ temos que $\mathcal{C}_t$ é definida por um mapa racional $\Phi_t : \mathbb{P}^3_k \dashrightarrow \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ de grau um com $\Phi_0 = \Phi$.

Grau do p-divisor em vizinhanças

Para demonstração do teorema principal é necessário um estudo sobre o comportamento do p-divisor em vizinhanças.

Grau do p-divisor em vizinhanças

Para demonstração do teorema principal é necessário um estudo sobre o comportamento do p-divisor em vizinhanças.

Teorema

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- *$\mathcal{F}$ é não p-fechada com p-divisor **reduzido**.*
- *A p-folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ tem grau $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Grau do p-divisor em vizinhanças

Para demonstração do teorema principal é necessário um estudo sobre o comportamento do p-divisor em vizinhanças.

Teorema

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- *$\mathcal{F}$ é não p-fechada com p-divisor* ***reduzido****.*
- *A p-folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ tem grau $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Então, existe um aberto $U_{\mathcal{F}}$ do espaço de folheações de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^3_k$ que contem $\mathcal{F}$ tal que para qualquer folheação $\mathcal{F}' \in U_{\mathcal{F}}$ temos

1. *$\mathcal{F}'$ é não p-fechada e $\Delta_{\mathcal{F}'}$ não admite p-fatores e $\deg(\Delta_{\mathcal{F}'}) \geq \deg(\Delta_{\mathcal{F}})$.*
2. *A p-folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}'}$ tem grau $e' \leq e$.*

Grau do p-divisor em vizinhanças

A prova consiste em reduzir a um problema de polinômios. É consequência da propriedade de invariância do p-divisor e da seguinte proposição.

Grau do p-divisor em vizinhanças

A prova consiste em reduzir a um problema de polinômios. É consequência da propriedade de invariância do p-divisor e da seguinte proposição.

Proposição

Sejam $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ e k um corpo de característica $p > 0$. Considere $\mathbb{P}^{M_d}_{\mathrm{k}}$ o espaço projetivo nas variáveis: x_0, x_1, x_2, x_3. Seja $G \in \mathrm{k}[x_0, x_1, x_2, x_3]_d$ um polinômio homogêneo de grau d tal que $G = FE^p$ com F livre de quadrados. Então, existe um aberto em torno de $[G]$ tal que para qualquer $[\tilde{G}] \in U_G$ temos que $\tilde{G} = \tilde{F}\tilde{E}^p$ com $\tilde{F}$ livre de p-potências com $\deg(\tilde{F}) \geq \deg(F)$.

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_k)$

- k = corpo de característica $p > d + 2$.
- $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k)$ = espaço parametrizando as folheações em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ com divisor canônico de tipo (d_1, d_2).
- $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_k, \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k)$ = coleção de mapas racionais de grau um.

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_k)$

- k = corpo de característica $p > d + 2$.
- $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k)$ = espaço parametrizando as folheações em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ com divisor canônico de tipo (d_1, d_2).
- $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_k, \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k)$ = coleção de mapas racionais de grau um.

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi_{(d;d_1,d_2)} : \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_k, \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k) &\dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_k) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\longmapsto \Phi^*\mathcal{G}. \end{aligned}$$

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}})$

- k = corpo de característica $p > d + 2$.
- $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}})$ = espaço parametrizando as folheações em $\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}$ com divisor canônico de tipo (d_1, d_2).
- $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}}, \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}})$ = coleção de mapas racionais de grau um.

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi_{(d;d_1,d_2)} : \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}}, \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}) &\dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}}) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\longmapsto \Phi^*\mathcal{G}. \end{aligned}$$

Teorema B

Seja $X_{(d;d_1,d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$. Então, $X_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}})$.

Ideia de prova

Passo 1: Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ para alguma folheação $\mathcal{G}$ de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$,
- $\mathcal{G}$ não p-fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Ideia de prova

Passo 1: Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ para alguma folheação $\mathcal{G}$ de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$,
- $\mathcal{G}$ não p-fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Passo 2: Note que $\mathcal{F}$ é não p-fechada e temos que $\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^*\Delta_{\mathcal{G}}$ (comparação de graus). Seja T uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_k)$ contendo a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ a família parametrizada por T com $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Ideia de prova

Passo 1: Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ para alguma folheação $\mathcal{G}$ de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$,
- $\mathcal{G}$ não p-fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Passo 2: Note que $\mathcal{F}$ é não p-fechada e temos que $\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^*\Delta_{\mathcal{G}}$ (comparação de graus). Seja T uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_k)$ contendo a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ a família parametrizada por T com $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Passo 3: Seja U um aberto de T contendo 0 tal que para todo $t \in U$ temos $\mathcal{F}_t$ não p-fechada. Nesse caso, para todo $t \in U$ temos a p-folheação associada: $\{\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}\}_{t\in U}$. O comportamento do grau do p-divisor em vizinhanças implica que reduzindo U, podemos supor $\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}) \leq 1$ para $t \in U$.

Ideia de prova

Passo 1: Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ para alguma folheação $\mathcal{G}$ de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$,
- $\mathcal{G}$ não p-fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Passo 2: Note que $\mathcal{F}$ é não p-fechada e temos que $\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^*\Delta_{\mathcal{G}}$ (comparação de graus). Seja T uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_k)$ contendo a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ a família parametrizada por T com $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Passo 3: Seja U um aberto de T contendo 0 tal que para todo $t \in U$ temos $\mathcal{F}_t$ não p-fechada. Nesse caso, para todo $t \in U$ temos a p-folheação associada: $\{\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}\}_{t\in U}$. O comportamento do grau do p-divisor em vizinhanças implica que reduzindo U, podemos supor $\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}) \leq 1$ para $t \in U$.

Passo 4: Uma comparação de graus mostra que $\mathcal{F}$ não está na componente das folheações que são pullbacks lineares de folheações em $\mathbb{P}^2_k$. Reduzindo a um aberto V em torno de 0 podemos supor que $\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}) = 1$ em V.

Ideia de prova

Passo 5: Como $\deg(\mathcal{F}_t) > 2$ podemos supor que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}$ é p-fechada. Caso contrário, existiria um campo homogêneo v_t de grau um tangente a $\mathcal{F}_t$ tal que $v_t \wedge v_t^p$ é não nulo e que define $\mathcal{F}_t$, o que é uma contradição por comparação de graus.

Ideia de prova

Passo 5: Como $\deg(\mathcal{F}_t) > 2$ podemos supor que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}$ é p-fechada. Caso contrário, existiria um campo homogêneo v_t de grau um tangente a $\mathcal{F}_t$ tal que $v_t \wedge v_t^p$ é não nulo e que define $\mathcal{F}_t$, o que é uma contradição por comparação de graus.

Passo 6: Por um lema técnico, garantimos que $\mathcal{F}_t$ é um pullback por uma aplicação racional de grau um de uma folheação de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$.

Ideia de prova

Passo 5: Como $\deg(\mathcal{F}_t) > 2$ podemos supor que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}$ é p-fechada. Caso contrário, existiria um campo homogêneo v_t de grau um tangente a $\mathcal{F}_t$ tal que $v_t \wedge v_t^p$ é não nulo e que define $\mathcal{F}_t$, o que é uma contradição por comparação de graus.

Passo 6: Por um lema técnico, garantimos que $\mathcal{F}_t$ é um pullback por uma aplicação racional de grau um de uma folheação de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$.

Passo 7: As considerações acima mostram que existe um aberto $U_{\mathcal{F}}$ no espaço das folheações de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^n_k$ contendo $\mathcal{F}$ que admite a seguinte propriedade:

- Para toda folheação $\tilde{\mathcal{F}} \in U_{\mathcal{F}}$ temos que $\tilde{\mathcal{F}} = \gamma^* \tilde{\mathcal{G}}$ para alguma $\tilde{\mathcal{G}} \in \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k)$ e $\gamma \in \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_k, \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k)$.

Logo, $U_{\mathcal{F}} \subset X_{(d;d_1,d_2)}$ e por passagem ao fecho de Zariski concluímos $T = X_{(d;d_1,d_2)}$.

Redução módulo p

- $X = \mathcal{Z}(F_0, \ldots, F_r) \subset \mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ variedade irredutível.
- $R = \mathbb{Z}$-álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em $F_0, \ldots, F_r$.

Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R)$ de R temos que o corpo $k(\mathfrak{p}) = R/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Redução módulo p

- $X = \mathcal{Z}(F_0, \ldots, F_r) \subset \mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ variedade irredutível.
- $R = \mathbb{Z}$-álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em $F_0, \ldots, F_r$.

Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R)$ de R temos que o corpo $k(\mathfrak{p}) = R/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Proposição (Bertini-Noether)

Sejam $\mathfrak{p} \in \boldsymbol{Spm}(R)$ um ideal maximal de R e considere $X_{\mathfrak{p}}$ a variedade definida sobre $k(\mathfrak{p})$ obtida por redução módulo $\mathfrak{p}$ dos polinômios $F_0, \ldots, F_r$. Então, $X_{\mathfrak{p}}$ é irredutível e $\dim X = \dim X_{\mathfrak{p}}$ para quase todo ideal maximal de R, isto é, para todo ideal maximal de R fora de conjunto fechado próprio $E \subset \boldsymbol{Spm}(R)$.

Componentes irredutíveis e redução módulo p

Sejam X uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ dada por polinômios $F_0, \ldots, F_r \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_M]$ e $Y \subset X$ um fechado irredutível dado por polinômios $H_0, \ldots, H_k \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_M]$. Seja Z uma componente irredutível de X contendo Y e suponha que esteja dada por polinômios $G_0, \ldots, G_l$. Denote por R a $\mathbb{Z}$-álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem nos polinômios $F_0, \ldots, F_r, G_0, \ldots, G_l, H_0, \ldots, H_k$.

Componentes irredutíveis e redução módulo p

Sejam X uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ dada por polinômios $F_0, \ldots, F_r \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_M]$ e $Y \subset X$ um fechado irredutível dado por polinômios $H_0, \ldots, H_k \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_M]$. Seja Z uma componente irredutível de X contendo Y e suponha que esteja dada por polinômios $G_0, \ldots, G_l$. Denote por R a $\mathbb{Z}$-álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem nos polinômios $F_0, \ldots, F_r, G_0, \ldots, G_l, H_0, \ldots, H_k$.

Corolário

Suponha que exista um conjunto denso S de $\boldsymbol{Spm}(R)$ tal que $Y_{\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$ para todo ideal $\mathfrak{p} \in S$. Então, $Y = Z$ e assim Y é uma componente irredutível de X.

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

Considere o mapa racional

$$\Psi_{(d;d_1,d_2)}: \ \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$$
$$(\Phi, \mathcal{G}) \mapsto \Phi^* \mathcal{G}.$$

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

Considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi_{(d;d_1,d_2)}\colon \ \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) &\dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\mapsto \Phi^*\mathcal{G}. \end{aligned}$$

Teorema A

Seja $C_{(d;d_1,d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$. Então, $C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Demonstração do Teorema A

Sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d + 2$ é verdadeiro.

Demonstração do Teorema A

Sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d + 2$ é verdadeiro. Sejam Z uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0, \ldots, E_h\}$ a união da coleção de polinômios a coeficientes em $\mathbb{C}$ que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Demonstração do Teorema A

Sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d+2$ é verdadeiro. Sejam Z uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0,\ldots,E_h\}$ a união da coleção de polinômios a coeficientes em $\mathbb{C}$ que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$. Seja R a $\mathbb{Z}$-álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em $E_0,\ldots,E_h$ e T o conjunto fechado em $\mathbf{Spm}(R)$ dado por $\cup_{j=2}^{d+2} V(jR) \subset \mathbf{Spm}(R)$. O Teorema B (componente em característica positiva) garante que para todo ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R) - T$ temos que $C_{(d;d_1,d_2),\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$.

Demonstração do Teorema A

Sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d + 2$ é verdadeiro. Sejam Z uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0, \ldots, E_h\}$ a união da coleção de polinômios a coeficientes em $\mathbb{C}$ que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$. Seja R a $\mathbb{Z}$-álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em $E_0, \ldots, E_h$ e T o conjunto fechado em $\mathbf{Spm}(R)$ dado por $\cup_{j=2}^{d+2} V(jR) \subset \mathbf{Spm}(R)$. O Teorema B (componente em característica positiva) garante que para todo ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R) - T$ temos que $C_{(d;d_1,d_2),\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$. Pelo corolário anterior temos que $Z = C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$, o que encerra a demonstração.

Demonstração do Teorema A

Sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d+2$ é verdadeiro. Sejam Z uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0,\ldots,E_h\}$ a união da coleção de polinômios a coeficientes em $\mathbb{C}$ que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$. Seja R a $\mathbb{Z}$-álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em $E_0,\ldots,E_h$ e T o conjunto fechado em $\mathbf{Spm}(R)$ dado por $\cup_{j=2}^{d+2} V(jR) \subset \mathbf{Spm}(R)$. O Teorema B (componente em característica positiva) garante que para todo ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R) - T$ temos que $C_{(d;d_1,d_2),\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$. Pelo corolário anterior temos que $Z = C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$, o que encerra a demonstração.

Corolário

O espaço de folheações holomorfas de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ *possui pelo menos* $\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor$ *componentes irredutíveis distintas com elemento genérico não admitindo um fator de integração polinomial.*

Obrigado :)