Prova 1: Cálculo IV - UFF

Professor: Wodson Mendson

14/11/2024

Boa prova!!!

Nome:

Valor: 10 pontos **Nota:**

Observação: procure justificar ao máximo sua resposta e de modo legível.

Questão 1. *(2 pontos) Estude a convergência e divergência as séries abaixo*

1. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$$

2. $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n+n^2-n^3}{5+n^2+n^3}$$

3. $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n(\ln(n))^3}$$

4. $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n^2}{n^3+1}$$

Questão 2. *(2 pontos) Resolva cada subquestão.*

1. *Encontre uma representação em série de potências para a função dada e determine o seu raio de convergência.*

   a) $$f(x) = \ln(2-x)$$

   b) $$g(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2}$$

2. *Calcule os limites abaixo usando representação em série das funções envolvidas:*

a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x}$$

b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + \frac{x^3}{6}}{x^5}$$

Questão 3. *(2 pontos) Calcule a solução em série centrada no ponto ordinário $x_0 = 0$ de cada uma das EDOs abaixo. Determine os pontos singulares, a relação de recorrência e os 4 primeiros termos da série. Discuta a convergência da série obtida.*

$$(x^2 - 1)y'' + 2y = 0$$

Questão 4. *(2 pontos) Sejam a, b, c números reais com $a > 0$ e $b \geq 0$ e considere a seguinte equação diferencial*

$$ay'' + by' + cy = 0$$

1. *Transforme a EDO acima num sistema de equações diferenciais matricial do tipo $\vec{x}(t) = A\vec{x}(t)$, onde A é uma matriz.*

2. *Estude condições em a, b, c de modo que o ponto crítico 0 seja do tipo: centro, instável e estável.*

3. *Use o item acima para encontrar a solução geral do sistema:*

$$\vec{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \vec{x}(t)$$

4. *Esboce o retrato de fase da sistema do item acima. Qual é a EDO: $ay'' + by' + cy = 0$ associada a esse sistema? O ponto 0 é instável, estável ou centro?*

Questão 5. *(2 pontos) Em cada item abaixo determine os autovalores e autovetores associados. Em seguida, encontre a solução geral do sistema de equações diferenciais $\vec{x}' = A\vec{x}$.*

1.
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

2.
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Questão 6. ***(Bonus: 1 ponto)*** *Dê exemplo de uma função $f \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que possui as seguintes propriedades: f admite uma série de Taylor em todo $a \in \mathbb{R}$ mas f não coincide com a sua série de Taylor em qualquer vizinhança de $a = 0$. Justifique sua resposta.*