# Solução P1 – Cálculo 4.

## Questão 1.

a-) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ : Aqui, note que:

$$\left|\frac{\cos(n)}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \geq 1.$$

Logo, pelo teste da comparação segue que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n^2}$ é convergente, pois $\sum 1/n^2$ é convergente (p-série com $p=2$)

b-) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+n+n^2-n^3}{5+n^2+n^3}$ :

Note que: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1+n+n^2-n^3}{5+n^2+n^3}$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1/n^3+1/n^2+1/n-1}{5/n^3+1/n+1} = -1$$

Logo, a série é divergente pelo teste da divergência.

c-) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{4}{n(\ln(n))^3} = 4 \cdot \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln(n)^3}$

UMA MANEIRA É VIA INTEGRAL:

$$\int \frac{1}{x \ln(x)^3} dx \qquad u = \ln(x) \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int \frac{1}{u^3} du = \frac{u^{-3+1}}{-3+1} + C = -\frac{u^{-2}}{2}$$

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln(x)^3} dx = \lim_{N \to +\infty} -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(x)^2} \Big|_2^N$$

$$= \left( \lim_{N \to +\infty} \underbrace{-\frac{1}{2 \ln(N)^2}}_{\to 0} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(2)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\ln(2)^2}$$

Logo, pelo Teste da Integral a série Converge!!

d-) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n^2}{n^2+1}$ $\qquad b_n = \dfrac{n^2}{n^2+1}$

Teste da série alternada: Devemos ver que

$$\begin{cases} b_{n+1} \le b_n \quad (i) \rightarrow \text{Via derivada } f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1}. \\ \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0 \quad (ii) \rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{n^3+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n(1+1/n^3)} = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 2x\cdot(x^3+1)^{-1} - (1(x^3+1)^{-2}\cdot 3x^2)x^2$$

$$= \frac{2x\cdot(x^3+1) - 3x^4}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^4+2x}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{x\cdot(-x^3+2)}{(x^2+1)^2}$$

é decrescente se $x > \sqrt[3]{2}$, em $[\sqrt[3]{2}, +\infty)$.

Logo, pelo teste da série alternada, a série converge. Note que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}$, diverge (compare com $1/n$)

Questão 2: $f(x) = \ln(2-x)$.

Temos: $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$, com raio de convergência $R = 1$.

Note: $\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{1-\frac{x}{2}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n$

Com raio de convergência: $R = 2$.

Como, $\int \frac{1}{2-x} dx = \ln(2-x)$, temos que:

o raio de convergência não muda e podemos encontrar a representação integrando termo a termo. $\therefore$

$$\ln(2-x) = c_0 + \int \frac{1}{2-x} dx = c_0 + \int \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n} dx$$

$$= c_0 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)2^n}$$

Fazendo, $x = 0$, obtemos $c_0 = \ln(2)$. Daí,

$$\boxed{\ln(2-x) = \ln(2) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2^n\cdot(n+1)}}$$

$$\left( \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+2}}{2^{n+1}\cdot(n+2)} \cdot \frac{(n+1)\,2^n}{x^{n+1}} \right| \right.$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x\cdot(n+1)}{2(n+2)} \right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x}{2}\right| < 1 \iff |x| < 2.$$

$$\boxed{R=2}.$$

b-) $g(x) = \dfrac{x^3}{(x-2)^2}$ ; $\dfrac{1}{x-2} = -\dfrac{1}{2-x}$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^n}, \text{ com } |x|<2 \quad R=2$$

$g'(x) = -1\cdot(x-2)^{-2}$, Tem o mesmo raio.

$\doteq$ obtido derivando termo a termo

$$= -\frac{1}{2}\cdot\sum \frac{x^n}{2^n} \; ; \; -x^3\cdot g'(x) = \frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{2^n}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+3}}{2^n}$$ , com raio $R = 2$. ///

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 - x}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots - \cancel{1} - \cancel{x}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(x^2/2! + x^3/3! + \cdots\right) x^{-1} = \lim_{x\to 0} x/2! + x^2/3! + \cdots$$

$$= 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + x^3/6}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} - x + x^3/6}{x}$$

Temos

$$\cancel{x} - \cancel{\frac{x^3}{3!}} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots - \cancel{x} + \cancel{\frac{x^3}{6}} = \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(y)$$

Logo,

$$\frac{\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + O(y)}{x^5} = \frac{1}{5!} - \frac{x^2}{7!} + O(4)$$

e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x) - x + x^3/6}{x^5} = 1/5!$$ ///

Questão 3: Suponha que exista uma solução $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Vamos determinar as condições nos $a_n$'s.

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n \cdot (n-1) x^{n-2}$$

Pontos singulares $= x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$$(x^2-1) y''(x) + 2y(x) = 0$$

$$(x^2-1) \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2} + 2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1) n x^n - \underline{\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) x^{n-2}} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n (n-1) n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} (n+2)(n+1) x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$= -2a_2 + 2a_0 - a_3 \cdot 6 \cdot x + 2a_1 x$$

$$+\sum_{n=2}^{\infty}\left(a_n\cdot(n-1)n - a_{n+2}(n+2)(n+1) + 2a_n\right)x^n = 0$$

Daí,

$$\begin{cases} a_2 = a_0 \\ a_3 = a_1/3 \end{cases}$$

$$a_{n+2} = \frac{a_n\cdot\{n(n-1)+2\}}{(n+2)(n+1)}$$ Relação Recorrência

$$a_4 = \frac{a_2\cdot 4}{4\cdot 3} = \frac{a_2}{2} = \frac{a_0}{2}$$

$$a_5 = \frac{a_3\cdot(2+6)}{5\cdot 4} = \frac{a_3\cdot 8}{4\cdot 5} = \frac{a_3\cdot 2}{5} = \frac{2a_1}{15}$$

Série converge para todo $x$ t.q $|x|<r$, onde $r = \min\{|0-1|, |0+1|\} = 1$

# Questão 4.

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

a-) Faça $x_1 = y \Rightarrow x_1' = y' = x_2$

$x_2 = y'$ $\quad x_2' = y'' = -a^{-1}by' - a^{-1}cy$

$= -a^{-1}b.x_2 - a^{-1}cx_1$

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a^{-1}c & -a^{-1}b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = A.\vec{x}$$

b-) Considere o polinômio característico de $A$:

$$P_A(t) = \det(A - t\,id) = \det\begin{pmatrix} -t & 1 \\ -a^{-1}c & -a^{-1}b - t \end{pmatrix}$$

$$= t.(a^{-1}b + t) + a^{-1}c$$

$$= t^2 + a^{-1}bt + a^{-1}c.$$

Econtrar os autovalores = encontrar as raízes de $P_A(t)$ = raízes de $at^2 + bt + c$

(Multiplicando por "a" $P_A(t)$)

$\tilde{P}(t) = at^2 + bt + c.$

Raízes: $t_0^{\pm} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Condições para centro = $t_0^{\pm}$ deve ser imaginário puro, ou seja, $b = 0$ e $-4ac < 0$. Como $a > 0$, devemos ter: $c > 0$. Logo: $\boxed{b = 0 \text{ e } c > 0}$

Condições par estável: Soluções devem se aproximar da origem $\Leftrightarrow$ parte real não nula e negativa. Dois casos:

$\Delta = b^2 - 4ac$

- Se $\Delta > 0$ então devemos ter $\sqrt{\Delta} < b$
- Se $\Delta < 0$ então devemos ter $b > 0$

Condição para instável: Se $\Delta > 0 \Rightarrow \pm\sqrt{\Delta} > b$

Se $\Delta < 0 \Rightarrow b < 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$a = 1 \quad c = -3$

$b = 2$

Equação associada: $y'' + 2y' - 3y$

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot (-3) = 16$

$\sqrt{\Delta} = 4 \; ; \quad -b \pm 4 = -2 \pm 4 = \begin{cases} -3 \\ 1 \end{cases}$

Instável.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \; ; \; P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 3-t & -2 \\ 4 & -1-t \end{pmatrix}$$

$= (3-t)(-1-t) + 8$

$= -3 - 3t + t + t^2 + 8 = t^2 - 2t + 5$

$\Delta = 4 - 20 = -16 \, . \quad t^{\pm} = \dfrac{2 \pm 4i}{2} \begin{cases} 1+2i \\ 1-2i \end{cases}$

$\underline{\alpha = (1+2i)}$ $\quad A - \alpha\, id$

$$= \begin{pmatrix} 3-1-2i & -2 \\ 4 & -1-1-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$= \begin{pmatrix} 2-2i & -2 \\ 4 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$(1-i)\,v_1 - v_2 = 0 \iff \begin{cases} v_1 = 1 \\ v_2 = 1-i \end{cases}$$

$$V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}.$$

SOLUÇÃO COMPLEXA ASSOCIADA:

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha t} \cdot V$$

$$= e^{(1+2i)t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = e^{t} \cdot e^{2it} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$= e^{t} \left( \cos(2t) + i\, \operatorname{sen}(2t) \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{pmatrix} \cos(2t)+i\,\text{sen}(2t) \\ \cos(2t)+i\,\text{sen}(2t) - i\cos(2t)+\text{sen}(2t) \end{pmatrix}$$

$$= e^{t}\begin{pmatrix} \cos(2t)+i\,\text{sen}(2t) \\ \cos(2t)+\text{sen}(2t)+i\left(\text{sen}(2t)-\cos(2t)\right) \end{pmatrix}$$

Tomando parte REAL e IMAGINÁRIA obtemos 2 soluções (REAL) LINEARMENTE Independentes

$$\vec{X}_1(t) = e^{t}\begin{pmatrix} \cos(2t) \\ \cos(2t)+\text{sen}(2t) \end{pmatrix}, \quad \vec{X}_2(t) = e^{t}\begin{pmatrix} \text{sen}(2t) \\ \text{sen}(2t)-\cos(2t) \end{pmatrix}$$

Solução geral: $\vec{X}(t) = C_1\,\vec{X}_1(t) + C_2\,\vec{X}_2(t)$

---

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad P_A(t) = \det \begin{pmatrix} 2-t & 0 & 0 \\ 1 & 2-t & -1 \\ 1 & 3 & -2-t \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ccc} 2-t & 0 & 0 \\ 1 & 2-t & -1 \\ 1 & 3 & -2-t \end{array}\right| \begin{array}{cc} 2-t & 0 \\ 1 & 2-t \\ 1 & 3 \end{array}$$

$$= (2-t)^2(-2-t) + 0 + 0 - 0 + 3(2-t) - 0$$

$$-(2-t)^2(2+t) + 3.(2-t)$$ . PELA EXPRESSÃO, CONCLUÍMOS

$t = 2$ É UMA RAÍZ

$t = 1$ É UMA RAÍZ

$t = -1$ É UMA RAÍZ $\Rightarrow P_A(t) = (t-1)(t+1)(t-2)$

AUTO VALORES = $\alpha_1 = 1$ $\quad \alpha_3 = -2$

$\alpha_2 = -1$

CÁLCULO DOS AUTO_VETORES ASSOCIADOS:

$\underline{\alpha_1 = 1}$ : $(A - \alpha_1 \, id) V_1 = 0$ $\quad V_1 = \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-1 & -1 \\ 1 & 3 & -2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{11} \\ v_{12} \\ v_{13} \end{pmatrix} = \underline{0} \Rightarrow v_{11} = 0$$

$$v_{12} - v_{13} = 0$$

$$\Rightarrow v_{12} = v_{13}$$

Tome $v_{12} = v_{13} = 1$ e assim obtemos:

$$V_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{x}_1(t) = e^{t} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha_2 = -1$ : $(A + id) V_2 = 0$ $\quad V_2 = \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 2+1 & 0 & 0 \\ 1 & 2+1 & -1 \\ 1 & 3 & -2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{21} \\ v_{22} \\ v_{23} \end{pmatrix} = \underline{0} \rightarrow v_{21} = 0$$

$$3 v_{22} - v_{23} = 0$$

Tome $v_{22} = 1$. Então $v_{23} = 3$ $\quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$\vec{x}_2(t) = e^{-t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\underline{\lambda_3 = 2}$: $\quad (A - 2id)\, V_3 = 0 \qquad V_3 = \begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_{31} \\ v_{32} \\ v_{33} \end{pmatrix} = \underline{0}$$

$$\rightarrow \begin{cases} v_{31} = v_{33} = 1 \\ v_{31} = -3v_{32} + 4v_{33} = -3 + 4 = 1 \end{cases}$$

Logo, $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{x}_3(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solução geral: $\vec{X}(t) = c_1\vec{X}_1(t) + c_2\vec{X}_2(t) + c_3\vec{X}_3(t).$