Prova 2: Cálculo 4 - UFF - 16/1/2024
Professor: Wodson Mendson - Turma R2

Aluno:
Valor: 10 pontos
Nota:

Observação: procure justificar ao máximo sua resposta e de modo legível. Tenha uma boa prova!

Questão 1. *(2 pontos) Seja $f\colon[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ e suponha que f, f' e f'' sejam funções admissíveis em $[0,\infty)$ e que f''' seja contínua por partes. Demonstre que vale a fórmula seguinte: $\mathcal{L}\{f'''\} = s^3\mathcal{L}\{f\} - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$.*

Questão 2. ***(2,5 pontos)***

1. ***(1 ponto)*** *Seja a uma constante. Demonstre a seguinte fórmula:*

$$\mathcal{L}\{t\cos(at)\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2+a^2)^2} \qquad s > 0$$

2. ***(1,5 pontos)*** *Resolva o PVI: $y'' + 2y' + 5y = 4e^{-t}\cos(2t)$ com $y(0) = 1$ e $y'(0) = 0$.*

Questão 3. ***(3 pontos)*** *Considere a função $g\colon[0,2\pi]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida pondo*

$$g(x) = \begin{cases} 2, & se \quad 0 \le x < \pi/2 \\ 1, & se \quad \pi/2 \le x \le 3\pi/2 \\ 2, & se \quad 3\pi/2 < x \le 2\pi \end{cases}$$

Denote por $G\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ o prolongamento periódico de período 2π da função g.

1. ***(0,7 pontos)*** *Faça um esboço de G no intervalo $[-2\pi, 2\pi]$.*
2. ***(1 ponto)*** *Determine o desenvolvimento de G em série de Fourier, $S_G(x)$, determinando os coeficientes, a_0, a_n e b_n da série.*
3. ***(0,8 pontos)*** *Determine os valores $x \in [-2\pi, 2\pi]$ para os quais $S_G(x) \neq G(x)$. Justifique.*
4. ***(0,5 pontos)*** *Use os itens anteriores para mostrar que vale a seguinte fórmula:*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$$

Questão 4. ***(2,5 pontos)*** *Usando o método de separação de variáveis descreva soluções da EDP:*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 9\frac{\partial u}{\partial t} \qquad x \in [0, L], \quad t > 0$$

O que podemos dizer se a EDP satisfaz a condição de fronteira: $f(0) = f(L) = 0$? Qual é a solução nesse caso?

Transformadas de Laplace Elementares

$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$
1	$\dfrac{1}{s}$, para $s > 0$	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$, para $s > a$
$\cos at$	$\dfrac{s}{s^2 + a^2}$, para $s > 0$	$\operatorname{sen} at$	$\dfrac{a}{s^2 + a^2}$, para $s > 0$
t^n, para $n = 0, 1, 2, \ldots$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$, para $s > 0$	$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$