26. Prove que a solução geral de

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}t + \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$ é

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1-\sqrt{2} \end{pmatrix}e^{\sqrt{2}t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1+\sqrt{2} \end{pmatrix}e^{-\sqrt{2}t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[8.5.2] Nos Problemas 27-30, os vetores coluna indicados formam um conjunto fundamental de soluções, em $(-\infty,\infty)$, para o sistema dado. Forme uma matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ e calcule $\mathbf{\Phi}^{-1}(t)$.

27. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{X};\ \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}e^{2t}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{7t}$

28. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X};\ \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-t}, \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{5t}$

29. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X};\ \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}e^{t},\ \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}te^{t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}e^{t}$

30. $\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{X};\ \mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\cos t + \operatorname{sen} t \end{pmatrix},\ \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} -2\operatorname{sen} t \\ \cos t - 3\operatorname{sen} t \end{pmatrix}$

31. Ache a matriz fundamental $\mathbf{\Psi}(t)$ que satisfaz $\mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{I}$ para o sistema dado no Problema 27.

32. Ache a matriz fundamental $\mathbf{\Psi}(t)$ que satisfaz $\mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{I}$ para o sistema dado no Problema 28.

33. Ache a matriz fundamental $\mathbf{\Psi}(t)$ que satisfaz $\mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{I}$ para o sistema dado no Problema 29.

34. Ache a matriz fundamental $\mathbf{\Psi}(t)$ que satisfaz $\mathbf{\Psi}(\pi/2) = \mathbf{I}$ para o sistema dado no Problema 30.

35. Se $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$ é a solução geral de $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, mostre que a solução do problema de valor inicial $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, $\mathbf{X}(t_o) = \mathbf{X}_o$, é $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_o)\mathbf{X}_o$.

36. Mostre que a solução do problema de valor inicial dada no Problema 35 é também dada por $\mathbf{X} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{X}_o$.

37. Mostre que $\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_o)$. [*Sug.*: Compare os Problemas 35 e 36.]

8.6 SISTEMAS LINEARES HOMOGÊNEOS

8.6.1 Autovalores Reais Distintos

No decorrer deste capítulo, trabalharemos apenas com sistemas lineares com coeficientes reais constantes.

No Exemplo 9 da Seção 8.5, vimos que a solução geral do sistema homogêneo

$$\frac{dx}{dt} = x + 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = 5x + 3y$$

é
$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}e^{6t}.$$

Como ambos os vetores solução apresentam a forma básica
$$\mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2.$$

k_1 e k_2 constantes, somos levados a indagar se é sempre possível achar uma solução da forma
$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}e^{\lambda t} = \mathbf{K}e^{\lambda t} \tag{1}$$

para o sistema linear homogêneo de primeira ordem
$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} \tag{2}$$

onde **A** é uma matriz de constantes $n \times n$.

Autovalores e Autovetores

Se (1) deve ser um vetor solução de (2), então $\mathbf{X}' = \mathbf{K}\lambda e^{\lambda t}$ de modo que o sistema se torna
$$\mathbf{K}\lambda e^{\lambda t} = \mathbf{AK}\lambda e^{\lambda t}.$$

Dividindo por $e^{\lambda t}$ e reordenando, obtemos
$$\mathbf{AK} = \lambda\mathbf{K}$$

ou
$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0}. \tag{3}$$

A Equação (3) é equivalente às equações algébricas simultâneas (8) da Seção 8.4. Para achar uma solução **X** não-trivial de (2), devemos achar um vetor não-trivial **K** que satisfaça (3). Mas para que (3) tenha soluções não-triviais, devemos ter
$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Reconhecemos nessa última equação a equação característica da matriz **A**. Em outras palavras, $\mathbf{X} = \mathbf{K}e^{\lambda t}$ será uma solução do sistema de equações diferenciais (2) se e somente se λ for um **autovalor** de **A** e **K** um **autovetor** correspondente a λ.

Quando a matriz $n \times n$ **A** possui n autovalores reais distintos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, então sempre se pode achar um conjunto de n autovetores linearmente independentes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ e
$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t}, \ \mathbf{X}_2 = \mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t}, \ \ldots, \ \mathbf{X}_n = \mathbf{K}_ne^{\lambda_n t}$$

é um conjunto fundamental de soluções de (2) em $(-\infty, \infty)$.

TEOREMA 8.9 Solução Geral – Sistemas Homogêneos

Sejam $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ n autovalores reais distintos da matriz de coeficientes **A** do sistema (2), e sejam $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_n$ os autovetores correspondentes. Então a **solução geral** de (2) no intervalo $(-\infty, \infty)$ é dada por

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{K}_1e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{K}_ne^{\lambda_n t}$$

EXEMPLO 1

Resolva

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3y$$
$$\frac{dy}{dt} = 2x + y. \qquad (4)$$

Solução Inicialmente achamos os autovalores e os autovetores da matriz de coeficientes.

A equação característica é

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0.$$

Como $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = (\lambda + 1)(\lambda - 4)$, notamos que os autovalores são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 4$.

Para $\lambda_1 = -1$, (3) é equivalente a

$$3k_1 + 3k_2 = 0$$
$$2k_1 + 2k_2 = 0.$$

Assim, $k_1 = -k_2$. Quando $k_2 = -1$, o autovetor correspondente é

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Para $\lambda_2 = 4$, temos

$$-2k_1 + 3k_2 = 0$$
$$2k_1 - 3k_2 = 0$$

de forma que $k_1 = 3k_2/2$ e, assim, com $k_2 = 2$, o autovetor correspondente é

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Como a matriz **A** de coeficientes é uma matriz 2×2, e como achamos duas soluções linearmente independentes de (4),

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t},$$

concluímos que a solução geral do sistema é

$$\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1 + c_2\mathbf{X}_2 = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}e^{-t} + c_2\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}e^{4t}. \tag{5}$$

■

Para fins de revisão, o leitor deve ter em mente que uma solução de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, quando escrita em termos de matrizes, nada mais é do que uma alternativa para o método que empregamos na Seção 8.1, a saber, listar as funções individuais e as relações entre as constantes. Somando os vetores dados em (5), obtemos

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1e^{-t} + 3c_2e^{4t} \\ -c_1e^{-t} + 2c_2e^{4t} \end{pmatrix}$$

o que, por seu turno, dá as relações mais familiares

$$x(t) = c_1e^{-t} + 3c_2e^{4t}$$
$$y(t) = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{4t}.$$

EXEMPLO 2

Resolva

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -4x + y + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + 5y - z \\ \frac{dz}{dt} &= y - 3z. \end{aligned} \tag{6}$$

Solução Tomando os co-fatores da terceira linha, obtemos

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 5-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+3)(\lambda+4)(\lambda+5) = 0$$

e assim os autovalores são $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -4$ e $\lambda_3 = 5$.

Para $\lambda_1 = -3$, a eliminação de Gauss-Jordan dá

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I} \mid \mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{operações com linhas}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Portanto, $k_1 = k_3$, $k_2 = 0$. A escolha $k_3 = 1$ dá o autovetor

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Analogamente, para $\lambda_2 = -4$,

$$(\mathbf{A}+4\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{operações com linhas}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

implica $k_1 = 10k_3$, $k_2 = -k_3$. Escolhendo $k_3 = 1$, obtemos o segundo autovetor

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(8)}$$

Finalmente, quando $\lambda_3 = 5$, as matrizes aumentadas

$$(\mathbf{A}-5\mathbf{I}|\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} -9 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{operações com linhas}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dão

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{(9)}$$

Multiplicando os vetores (7), (8) e (9) por e^{-3t}, e^{-4t} e e^{5t}, respectivamente, temos três soluções de (6):

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

A solução geral do sistema é então

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

■

8.6.2 Autovalores Complexos

Se
$$\lambda_1 = \alpha + i\beta \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \alpha - i\beta, \quad i^2 = -1,$$

são autovalores complexos da matriz **A** de coeficientes, podemos sem dúvida esperar que seus autovetores correspondentes também tenham elementos complexos.*

*Quando a equação característica tem coeficientes reais, os autovalores complexos sempre aparecem em pares conjugados.

Por exemplo, a equação característica do sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 6x - y\\ \frac{dy}{dt} &= 5x + 4y\end{aligned} \tag{10}$$

é

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & -1 \\ 5 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0.$$

Pela fórmula quadrática, obtemos

$$\lambda_1 = 5 + 2i, \quad \lambda_2 = 5 - 2i.$$

Para $\lambda_1 = 5 + 2i$, devemos resolver

$$\begin{aligned}(1-2i)k_1 - \quad k_2 &= 0\\ 5k_1 - (1+2i)k_2 &= 0.\end{aligned}$$

Como $k_2 = (1 - 2i)k_1$,* decorre, após escolhermos $k_1 = 1$, que um autovetor é

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix}.$$

Analogamente, para $\lambda_2 = 5 - 2i$, achamos o outro autovetor

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix}.$$

Conseqüentemente, duas soluções de (10) são

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}.$$

Pelo princípio de superposição, outra solução é

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} + c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1+2i \end{pmatrix} e^{(5-2i)t}. \tag{11}$$

Note que os elementos em $\mathbf{K}_2$ correspondentes a λ_2 são os conjugados dos elementos em $\mathbf{K}_1$ correspondentes a λ_1. O conjugado de λ_1 é, naturalmente, λ_2. Escrevemos $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ e $\mathbf{K}_2 = \overline{\mathbf{K}}_1$. Acabamos de ilustrar o seguinte resultado geral.

*Note que a segunda equação é simplesmente $(1 + 2i)$ vezes a primeira.

TEOREMA 8.10 Soluções Correspondentes a Autovalores Complexos

Seja **A** a matriz de coeficientes, com elementos reais, do sistema homogêneo (2), e seja **K** um autovetor correspondente ao autovalor complexo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, com α e β reais. Então

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_2 = \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t}$$

são soluções de (2).

É conveniente, e relativamente fácil, escrever uma solução como (11) em termos de funções reais. Como

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{(5+2i)t} + c_2 e^{(5-2i)t} \\ y &= c_1(1-2i)e^{(5+2i)t} + c_2(1+2i)e^{(5-2i)t}, \end{aligned}$$

decorre da fórmula de Euler que

$$\begin{aligned} x &= e^{5t}[c_1 e^{2it} + c_2 e^{-2it}] \\ &= e^{5t}[(c_1 + c_2)\cos 2t + (c_1 i + c_2 i)\,\mathrm{sen}\, 2t] \\ y &= e^{5t}[(c_1(1-2i) + c_2(1+2i))\cos 2t + (c_1 i(1-2i) - c_2 i(1+2i))\,\mathrm{sen}\, 2t] \\ &= e^{5t}[(c_1 + c_2) - 2(c_1 i - c_2 i)]\cos 2t + e^{5t}[2(c_1 + c_2) + (c_1 i - c_2 i)]\,\mathrm{sen}\, 2t. \end{aligned}$$

Substituindo $c_1 + c_2$ por C_1 e $c_1 i - c_2 i$ por C_2, então

$$\begin{aligned} x &= e^{5t}[C_1 \cos 2t + C_2\,\mathrm{sen}\, 2t] \\ y &= e^{5t}[C_1 - 2C_2]\cos 2t + e^{5t}[2C_1 + C_2]\,\mathrm{sen}\, 2t \end{aligned}$$

ou, em termos de vetores,

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} \mathrm{sen}\, 2t \\ -2\cos 2t + \mathrm{sen}\, 2t \end{pmatrix} e^{5t}. \tag{12}$$

Aqui, naturalmente, pode-se verificar que cada vetor em (12) é uma solução de (10). Além disso, as soluções são linearmente independentes no intervalo $(-\infty, \infty)$. Podemos ainda supor que C_1 e C_2 sejam completamente arbitrários e reais. Assim, (12) é a solução geral de (10).

Podemos generalizar o processo precedente. Seja $\mathbf{K}_1$ um autovetor da matriz **A** correspondente ao autovalor complexo $\lambda_1 = \alpha + i\beta$. Então, $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$ no Teorema 8.10 podem ser escritos como

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} &= \mathbf{K}_1 e^{\alpha t} e^{i\beta t} = \mathbf{K}_1 e^{\alpha t}(\cos \beta t + i\,\mathrm{sen}\, \beta t) \\ \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t} &= \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\alpha t} e^{-i\beta t} = \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\alpha t}(\cos \beta t - i\,\mathrm{sen}\, \beta t). \end{aligned}$$

As equações precedentes dão

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t}) &= \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\cos \beta t - \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\, \beta t \\ \frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + \overline{\mathbf{K}}_1 e^{\overline{\lambda}_1 t}) &= \frac{i}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\cos \beta t + \frac{1}{2}\,(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)e^{\alpha t}\,\mathrm{sen}\, \beta t. \end{aligned}$$

Para *qualquer* número complexo $z = a + ib$, notamos que $\frac{1}{2}(z+\bar{z}) = a$ e $\frac{i}{2}(-z+\bar{z}) = b$ são números *reais*. Portanto, os elementos dos vetores coluna $\frac{1}{2}(\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)$ e $\frac{i}{2}(-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1)$ são números reais. Definindo

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{2}[\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1] \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_2 = \frac{i}{2}[-\mathbf{K}_1 + \overline{\mathbf{K}}_1], \tag{13}$$

somos levados ao teorema seguinte:

TEOREMA 8.11 Soluções Reais Correspondentes a um Autovalor Complexo

Seja $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ um autovalor complexo da matriz **A** de coeficientes no sistema homogêneo (2), e denotemos por $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ os vetores coluna definidos em (13). Então

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_1 &= (\mathbf{B}_1 \cos \beta t - \mathbf{B}_2 \operatorname{sen} \beta t)e^{\alpha t} \\ \mathbf{X}_2 &= (\mathbf{B}_2 \cos \beta t + \mathbf{B}_1 \operatorname{sen} \beta t)e^{\alpha t} \end{aligned} \tag{14}$$

são soluções linearmente independentes de (2) no intervalo $(-\infty, \infty)$.

As matrizes $\mathbf{B}_1$ e $\mathbf{B}_2$ em (13) costumam denotar-se por

$$\mathbf{B}_1 = \operatorname{Re}(\mathbf{K}_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_2 = \operatorname{Im}(\mathbf{K}_1) \tag{15}$$

porque esses vetores são, respectivamente, as partes *real* e *imaginária* do autovetor $\mathbf{K}_1$. Por exemplo, (12) decorre de (14) com

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B}_1 = \operatorname{Re}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_2 = \operatorname{Im}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

EXEMPLO 3

Resolver

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

Solução Inicialmente, obtemos os autovalores a partir de

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 8 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0.$$

Assim, os autovalores são $\lambda_1 = 2i$ e $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1 = -2i$. Para λ_1, vemos que o sistema

$$\begin{aligned} (2-2i)k_1 + \qquad 8k_2 &= 0 \\ -k_1 + (-2-2i)k_2 &= 0 \end{aligned}$$

dá $k_1 = -(2+2i)k_2$. Escolhendo $k_2 = -1$, obtemos

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2+2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De (15), formamos

$$\mathbf{B}_1 = \mathrm{Re}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_2 = \mathrm{Im}(\mathbf{K}_1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como $\alpha = 0$, decorre de (14) que a solução geral do sistema é

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= c_1\left[\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right] + c_2\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\operatorname{sen} 2t\right] \\ &= c_1\begin{pmatrix} 2\cos 2t - 2\operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

■

EXEMPLO 4

Resolver $\quad \mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$

Solução As soluções da equação característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -\frac{1}{2} & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$$

são $\quad \lambda_1 = 1+i \;$ e $\; \lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = 1-i.$

Agora, um autovetor associado a λ_1 é

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De (15), vem

$$\mathbf{B}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, (14) nos dá

$$\begin{aligned} \mathbf{X} &= c_1\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\operatorname{sen} t\right]e^t + c_2\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}\operatorname{sen} t\right]e^t \\ &= c_1\begin{pmatrix} 2\cos t \\ -\operatorname{sen} t \end{pmatrix}e^t + c_2\begin{pmatrix} 2\operatorname{sen} t \\ \cos t \end{pmatrix}e^t. \end{aligned}$$

■

Método Alternativo

Quando **A** é uma matriz 2×2 com um autovalor complexo $\lambda = \alpha + i\beta$, a solução geral do sistema também pode ser obtida a partir da hipótese

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t + \begin{pmatrix} c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t$$

levando-se então $x(t)$ e $y(t)$ em uma das equações do sistema original. Esse processo é basicamente o da Seção 8.1.

8.6.3 Autovalores Repetidos

Até aqui não consideramos o caso em que alguns dos n autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de uma matriz $n \times n$ sejam repetidos. Por exemplo, vê-se imediatamente que a equação característica da matriz de coeficientes em

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -18 \\ 2 & -9 \end{pmatrix} \mathbf{X} \tag{16}$$

é $(\lambda + 3)^2 = 0$ e, assim, que $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$ é uma raiz de *multiplicidade dois*. Para esse valor, obtemos o único autovetor

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e assim uma solução de (16) é

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}. \tag{17}$$

Mas como estamos obviamente interessados em formar a solução geral do sistema, devemos prosseguir na busca de uma segunda solução.

De modo geral, se m é um inteiro positivo e $(\lambda - \lambda_1)^m$ é um fator da equação característica, enquanto que $(\lambda - \lambda_1)^{m+1}$ não o é, então dizemos que λ_1 é um **autovalor de multiplicidade m**. Distinguimos duas possibilidades:

(i) Para algumas matrizes $n \times n$, é possível eventualmente achar m autovetores linearmente independentes $\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \ldots, \mathbf{K}_m$ correspondentes a um autovalor λ_1 de multiplicidade $m \leq n$. Nesse caso, a solução geral do sistema contém a combinação linear

$$c_1\mathbf{K}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{K}_2 e^{\lambda_1 t} + \cdots + c_m\mathbf{K}_m e^{\lambda_1 t}.$$

(ii) Se há apenas um autovetor correspondendo ao autovalor λ_1 de multiplicidade m, então sempre podemos achar m soluções linearmente independentes da forma

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}_{11}e^{\lambda_1 t}$$
$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}_{21}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{K}_{22}e^{\lambda_1 t}$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{X}_m = \mathbf{K}_{m1}\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{K}_{m2}\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}e^{\lambda_1 t} + \cdots + \mathbf{K}_{mm}e^{\lambda_1 t},$$

onde $\mathbf{K}_{ij}$ são vetores coluna.

Autovalores de Multiplicidade Dois

Consideraremos inicialmente autovalores de multiplicidade dois. No primeiro exemplo, ilustramos uma matriz para a qual podemos achar dois autovetores distintos correspondentes a um autovalor duplo.

EXEMPLO 5

Resolver
$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

Solução Desenvolvendo o determinante na equação característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

vem $-(\lambda + 1)^2(\lambda - 5) = 0$. Vemos que $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = 5$.

Para $\lambda_1 = -1$, a eliminação de Gauss-Jordan dá imediatamente

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I}|\,\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{operações com linhas}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

De $k_1 - k_2 + k_3 = 0$, podemos expressar, digamos, k_1 em termos de k_2 e k_3. Escolhendo $k_2 = 1$ e $k_3 = 0$ em $k_1 = k_2 - k_3$, obtemos $k_1 = 1$ e, assim, um autovetor é

$$\mathbf{K}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mas a escolha $k_2 = 1$, $k_3 = 1$ implica $k_1 = 0$. Logo, um segundo autovetor é

$$\mathbf{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Como nenhum dos autovetores é múltiplo constante do outro, obtivemos duas soluções linearmente independentes correspondentes ao mesmo autovalor:

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{e} \quad \mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Finalmente, para $\lambda_3 = 5$, a redução

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I}\,|\,\mathbf{0}) = \left(\begin{array}{rrr|r} -4 & -2 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & -2 & 0 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{operações com linhas}} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

implica $k_1 = k_3$ e $k_2 = -k_3$. Escolhendo $k_3 = 1$, vem $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ e, assim,

$$\mathbf{K}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

é um terceiro autovetor.

Concluímos que a solução geral do sistema é

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{5t}.$$

■

Segunda Solução

Suponhamos agora que λ_1 seja um autovalor de multiplicidade dois e que haja apenas um autovetor associado a esse valor. Pode-se achar uma solução da forma

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}\, t e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P} e^{\lambda_1 t}, \qquad \textbf{(18)}$$

onde

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}.$$

Para confirmar, levamos (18) no sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ e simplificamos:

$$(\mathbf{A}\mathbf{K} - \lambda_1 \mathbf{K}) t e^{\lambda_1 t} + (\mathbf{A}\mathbf{P} - \lambda_1 \mathbf{P} - \mathbf{K}) e^{\lambda_1 t} = \mathbf{0}.$$

Como essa última equação deve ser válida para todos os valores de t, devemos ter

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0} \tag{19}$$

e

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K}. \tag{20}$$

A Equação (19) simplesmente afirma que $\mathbf{K}$ deve ser um autovetor de $\mathbf{A}$ associado a λ_1. Resolvendo (19), encontramos uma solução $\mathbf{X}_1 = \mathbf{K}e^{\lambda_1 t}$. Para achar a segunda solução $\mathbf{X}_2$, basta resolvermos o sistema adicional (20) em relação ao vetor $\mathbf{P}$.

EXEMPLO 6

Ache a solução geral do sistema dado em (16).

Solução Por (17), sabemos que $\lambda_1 = -3$, e que uma solução é

$$\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

Identificando $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$, vemos, por (20), que devemos resolver

$$(\mathbf{A} + 3\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 6 & -18 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Efetuando a multiplicação nessa última expressão, vem

$$\begin{aligned} 6p_1 - 18p_2 &= 3 \\ 2p_1 - 6p_2 &= 1. \end{aligned}$$

Como esse sistema é obviamente equivalente a uma única equação, temos um número infinito de escolhas para p_1 e p_2. Escolhendo, por exemplo, $p_1 = 1$, obtemos $p_2 = 1/6$. Entretanto, por questão de simplicidade, escolheremos $p_1 = 1/2$, de forma que $p_2 = 0$. Logo, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$. Assim, de (18), obtemos

$$\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

A solução geral de (16) é então

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} te^{-3t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-3t} \right].$$

■

Autovalores de Multiplicidade Três

Quando uma matriz $\mathbf{A}$ tem apenas um autovetor associado a um autovalor λ_1 de multiplicidade três, podemos achar uma segunda solução da forma (18) e uma terceira solução da forma

$$\mathbf{X}_3 = \mathbf{K}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_1 t} + \mathbf{P}te^{\lambda_1 t} + \mathbf{Q}e^{\lambda_1 t}, \tag{21}$$

onde $\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ e $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$.

Levando (21) no sistema $\mathbf{X}' = \mathbf{AX}$, vemos que os vetores colunas **K**, **P** e **Q** devem satisfazer

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{K} = \mathbf{0} \tag{22}$$

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K} \tag{23}$$

e

$$(\mathbf{A} - \lambda_1\mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{P}. \tag{24}$$

É claro que as soluções de (22) e (23) podem ser utilizadas na formulação das soluções $\mathbf{X}_1$ e $\mathbf{X}_2$.

EXEMPLO 7

Resolver

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{X}.$$

Solução A equação característica $(\lambda - 2)^3 = 0$ mostra que $\lambda_1 = 2$ é um autovalor de multiplicidade três. Em seqüência, vemos que uma solução de

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{K} = 0 \text{ é } \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

uma solução de

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{P} = \mathbf{K} \text{ é } \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix};$$

e, finalmente, que uma solução de

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{Q} = \mathbf{P} \text{ é } \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Por (18) e (21), vemos que a solução geral do sistema é

$$\mathbf{X} = c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t} + c_2\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}e^{2t}\right] + c_3\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} \end{pmatrix}e^{2t}\right].$$

■

8.6 EXERCÍCIOS

As respostas dos exercícios selecionados estão nas páginas 393 a 394.

[8.6.1] Nos Problemas 1-12, ache a solução geral do sistema dado.

1. $$\frac{dx}{dt} = x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = 4x + 3y$$

2. $$\frac{dx}{dt} = 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = 8x$$

3. $$\frac{dx}{dt} = -4x + 2y$$
$$\frac{dy}{dt} = -\frac{5}{2}x + 2y$$

4. $$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}x + 9y$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2}x + 2y$$

5. $$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

6. $$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

7. $$\frac{dx}{dt} = x + y - z$$
$$\frac{dy}{dt} = 2y$$
$$\frac{dz}{dt} = y - z$$

8. $$\frac{dx}{dt} = 2x - 7y$$
$$\frac{dy}{dt} = 5x + 10y + 4z$$
$$\frac{dz}{dt} = 5y + 2z$$

9. $$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

10. $$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

11. $$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ \frac{3}{4} & -\frac{3}{2} & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

12. $$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{X}$$

Nos Problemas 13 e 14, resolva o sistema dado, sujeito às condições iniciais indicadas.

13. $$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

14. $$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{X}, \quad \mathbf{X}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

[8.6.2] Nos Problemas 15-26, ache a solução geral do sistema dado.

15. $$\frac{dx}{dt} = 6x - y$$
$$\frac{dy}{dt} = 5x + 2y$$

16. $$\frac{dx}{dt} = x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x - y$$