LISTA 3
Cálculo 1 -2023.2

Definição de função contínua
Teorema do Valor Intermediário (TVI)

Exercício 1

Em cada um dos exercícios abaixo verifique se a função f é contínua no ponto a indicado:

1. $a = 2$ e $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-6}{x-2} & \text{se } x < 2 \\ 5 & \text{se } x = 2 \\ \operatorname{sen}(x^2-4) & \text{se } x > 2 \end{cases}$

2. $a = 3$ e $f(x) = \begin{cases} \frac{|x^2-4x+3|}{x-3} & \text{se } x \neq 3 \\ 1 & \text{se } x = 3 \end{cases}$

Exercício 2

Determine os valores das constantes a e b para que as funções abaixo sejam contínuas em $\mathbb{R}$

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & \text{se } x < -1 \\ ax+b & \text{se } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x} & \text{se } x > 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+2|}{x+2} & \text{se } x < -2 \text{ ou } x > 0 \\ ax^2+b & \text{se } -2 \leqslant x \leqslant 0 \end{cases}$

Exercício 3

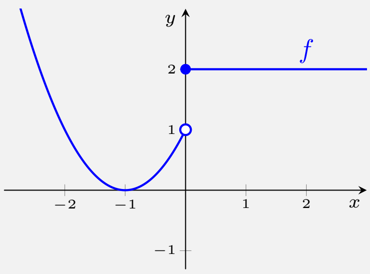
Para cada função g definida nos itens abaixo, diga se existe uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, contínua em $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x)$ para todo x no domínio de g. Caso seja possível, dê a expressão da função f

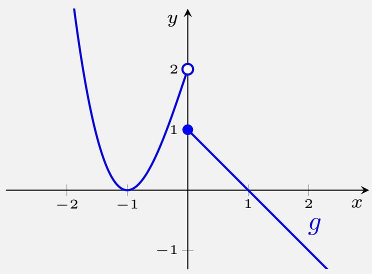
1. $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(3x-3)}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases}$

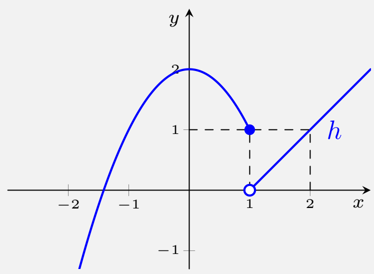
2. $g(x) = \dfrac{|x-3|}{x-3}$

Exercício 4

Sejam f, g e h funções com domínio $\mathbb{R}$, representadas pelos gráficos abaixo.







Verifique se as funções $(f \cdot g)$ e $(h \circ g)$ são contínuas em $x = 0$.

Exercício 5

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que $x^2 \cos^2(x) \leq f(x) \leq x\,\mathrm{sen}(x)$, $\forall x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Verifique se f é contínua em $x = 0$.

Exercício 6

Considere a função f definida por $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5$. Mostre que $f(x) = 10$ tem pelo menos uma solução no intervalo $(4, 5)$.

Exercício 7

Seja f uma função contínua, de domínio $[0, 5]$ e contradomínio $[3, 4]$. Seja g a função de domínio $[0, 5]$, definida por $g(x) = f(x) - x$. Prove que a função g tem, pelo menos, um zero.

Exercício 8

Para cada função abaixo determine um intervalo de amplitude 1, no qual está localizado pelo menos um zero dessa função.

1. $f(x) = x^3 + x - 1$
2. $f(x) = 1 + x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

Exercício 9

Mostre que os gráficos de $y = 1$ e $y = x^2\tan(x)$ têm interseção em pelo menos um ponto do intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Exercício 10

Use o Teorema do Valor Intermediário para mostrar que existe uma solução da equação dada no intervalo especificado.

1. $x^2 = \sqrt{x+1}$, $(1, 2)$
2. $\ln x = e^{-x}$, $(1, 2)$

Solução do Exercício 1

Para verificar a continuidade de f no ponto a indicado devemos verificar se $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

1. Não, pois $\lim\limits_{x \to 2^+} \mathrm{sen}(x^2 - 4) = \mathrm{sen}(0) = 0 \neq 5 = f(2)$.
2. Não, pois

Como $x \to 3^-$ então $x < 3$ e assim $(x-3)(x-1) < 0$.
Portanto $|(x-3)(x-1)| = -(x-3)(x-1)$

$$\begin{aligned}\lim_{x \to 3^-} \frac{|x^2 - 4x + 3|}{x - 3} &= \lim_{x \to 3^-} \frac{|(x-3)(x-1)|}{x-3} = \lim_{x \to 3^-} -\frac{(x-3)(x-1)}{x-3} \\ &= \lim_{x \to 3^-} -(x-1) = -2 \neq 1 = f(3)\end{aligned}$$

Solução do Exercício 2

1. Precisamos descobrir a e b para que

$$\lim_{x\to-1} f(x) = f(-1) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Como

$$\lim_{x\to-1^-} f(x) = \lim_{x\to-1^-} \frac{x^2-1}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \lim_{x\to-1^-} x-1 = -2,$$

precisamos ter $-2 = f(-1) = a\cdot(-1)+b = b-a$.

Por outro lado, como

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{x} = \lim_{x\to0^+} 3\cdot\frac{\operatorname{sen}(3x)}{3x} = 3,$$

precisamos ter $3 = f(0) = a\cdot 0 + b$, logo $b=3$. Como já sabemos que $b-a=-2$, temos $3-a=-2$, logo $a=5$.

2. Queremos

$$\lim_{x\to-2} f(x) = f(-2) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = f(0).$$

Como

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \frac{|x+2|}{x+2} \underset{\substack{\downarrow\\ \boxed{x+2<0}}}{=} \lim_{x\to-2^-} \frac{-(x+2)}{x+2} = -1,$$

precisamos ter $-1 = f(-2) = a\cdot(-2)^2+b = 4a+b$.

Por outro lado, como

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{|x+2|}{x+2} \underset{\substack{\downarrow\\ \boxed{x+2>0}}}{=} \lim_{x\to-2^-} \frac{x+2}{x+2} = 1,$$

precisamos ter $1 = f(0) = a\cdot 0^2 + b = b$. Logo, $b=1$.

Como já tínhamos $4a+b=-1$, temos $4a+1=-1$, logo $4a=-2$ e então $a=-\frac{1}{2}$.

3. Queremos

$$\lim_{x\to2} f(x) = f(2) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 4} f(x) = f(4).$$

Como

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \lim_{x\to2^-} \frac{\operatorname{sen}(b(x-2))}{|x-2|} \underset{\substack{\downarrow\\ \boxed{x-2<0}}}{=} \lim_{x\to-2^-} \frac{\operatorname{sen}(b(x-2))}{-(x-2)} = \lim_{x\to-2^-} b\cdot\frac{\operatorname{sen}(b(x-2))}{-b(x-2)} = -b,$$

precisamos ter $-b = f(2) = 2a$, logo $b=-2a$.

Por outro lado, como

$$\lim_{x\to4^+} f(x) = \lim_{x\to4^+} \frac{x^2-9x+20}{x-4} = \lim_{x\to4^+} \frac{(x-5)(x-4)}{x-4} = \lim_{x\to4^+} x-5 = -1$$

precisamos ter $-1 = f(4) = 4a$. Logo, $a=-\frac{1}{4}$.

Como já tínhamos $b=-2a$, temos $b=-2\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)$, logo $b=\frac{1}{2}$.

Solução do Exercício 3

1. Observe que g é contínua em $\mathbb{R} - \{1\}$. Temos ainda que

$$\lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{\text{sen}(3x-3)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\text{sen}(3(x-1))}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} 3 \cdot \overbrace{\frac{\text{sen}(3(x-1))}{3(x-1)}}^{\to 1} = 3.$$

$$\lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} (x+2) = 3.$$

Assim, $\lim\limits_{x\to 1} g(x) = 3$. Definindo

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(3x-3)}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \\ \dfrac{x^2+x-2}{x-1}, & \text{se } x > 1 \end{cases},$$

temos f contínua em $\mathbb{R}$. A continuidade em $x = 1$ vem de

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} g(x) = 3 = f(1).$$

2. Observe que g é contínua em $\mathbb{R} - \{3\}$. Temos ainda que

$$\lim_{x\to 3^-} g(x) = \lim_{x\to 3^-} \frac{|x-3|}{x-3} \underset{x-3<0}{=} \lim_{x\to 3^-} \frac{-(x-3)}{x-3} = -1,$$

$$\lim_{x\to 3^+} g(x) = \lim_{x\to 3^+} \frac{|x-3|}{x-3} \underset{x-3>0}{=} \lim_{x\to 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1,$$

portanto, não podemos definir um valor para $f(3)$ de forma a termos $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$, pois $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \lim\limits_{x\to 3} g(x)$, que não existe.

Solução do Exercício 4

Pelos gráficos podemos verificar que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 2$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1$ e $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = 2$. Então

$$\lim_{x\to 0^+} (fg)(x) = \left(\lim_{x\to 0^+} f(x)\right)\left(\lim_{x\to 0^+} g(x)\right) = 2 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^-} (fg)(x) = \left(\lim_{x\to 0^-} f(x)\right)\left(\lim_{x\to 0^-} g(x)\right) = 2.$$

Além disso, $(fg)(0) = 2 \cdot 1 = 2$. Logo, fg é contínua em $x = 0$.

Para verificar se $h \circ g$ é contínua em 0, precisamos observar que quando x tende para 0^- então $g(x)$ tende para 2^- (pela esquerda) e quando x tende para 0^+ então $g(x)$ tende para 1^- (pela esquerda). Logo

$$\lim_{x\to 0^-} (h\circ g)(x) \underset{\boxed{x\to 0^- \implies y = g(x) \to 2^-}}{=} \lim_{y\to 2^-} h(y) = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} (h\circ g)(x) \underset{\boxed{x\to 0^+ \implies y = g(x) \to 1^-}}{=} \lim_{y\to 1^-} h(y) = 1.$$

Além disso $(h \circ g)(0) = h(1) = 1$. Portanto $h \circ g$ é contínua em 0.

Solução do Exercício 5

Temos que $\lim_{x\to 0} x^2\cos(x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} x\,\text{sen}(x) = 0$, logo, pelo Teorema do Confronto, obtemos $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Além disso $f(0) = 0$, pois se substituirmos x por 0 nas desigualdades $x^2\cos^2(x) \leq f(x) \leq$

$x\,\text{sen}(x)$, obtemos $0 \leq f(x) \leq 0$. Portanto f é contínua em $x = 0$.

Solução do Exercício 6

Temos que f é contínua em $\mathbb{R}$ Como $f(4) = 5$ e $f(5) = 30$, então pelo TVI, existe $x \in (4,5)$ tal que $f(x) = 10$.

Solução do Exercício 7

A função $g(x) = f(x) - x$ é contínua em $[0,5]$. Como $g(0) = f(0) - 0 = f(0) \in [3,4]$ e $g(5) = f(5) - 5 \in [-2,-1]$, então $g(0) > 0$ e $g(5) < 0$. Assim, pelo TVI, existe $x \in [0,5]$ tal que $g(x) = 0$.

Solução do Exercício 8

1. A função f é contínua, pois é um polinômio. Como $f(0) = -1 < 0$ e $f(1) = 1 > 0$, pelo TVI, existe pelo menos um zero de f no intervalo $(0,1)$.
2. A função f é contínua, por ser a soma de uma constante com uma função trigonométrica. Como $f(1) = 1 > 0$ e $f(2) = -1 < 0$, pelo TVI, existe pelo menos um zero de f no intervalo $(1,2)$.

Solução do Exercício 9

Considere a função $f(x) = x^2 \tan(x)$. Temos que a função f é contínua em $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,

$$\lim_{x \to \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty.$$

Logo pelo TVI, a função f admite um zero no intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ou seja, exsite $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tal que $f(x_1) = 1$.

(*Obs: Note que a conclusão é equivalente a dizer que a equação* $x^2 \tan(x) = 1$ *tem solução no intervalo* $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.)

Solução do Exercício 10

1. Defina $f(x) = x^2 - \sqrt{x+1}$. Temos que f é contínua em $[1,2]$ (o único problema à continuidade seria a raiz não estar definida, mas $x + 1 \geqslant 0$ para todo $x \in [1,2]$). Temos ainda $f(1) = 1 - \sqrt{2} < 0$, $f(2) = 4 - \sqrt{3} > 0$. Assim, $f(1) < 0 < f(2)$, logo, pelo TVI, existe $x \in (1,2)$ tal que $f(x) = x^2 - \sqrt{x+1} = 0$, logo $x^2 = \sqrt{x+1}$.
2. Defina $f(x) = \text{sen}(x) - x + 1$. Temos que f é contínua em $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2} + 1 = 2 - \frac{\pi}{2} > 0$ e $f(\pi) = 0 - \pi + 1 < 0$. Assim, $f(\pi) < 0 < f\left(\frac{\pi}{2}\right)$, logo, pelo TVI, existe $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ tal que $f(x) = \text{sen}(x) - x + 1 = 0$, logo $\text{sen}(x) = x - 1$.
3. Defina $f(x) = \ln x - e^{-x}$. Temos que f é contínua em $[1,2]$ (o único problema à continuidade seria ln não estar definida, mas $x \geqslant 1 > 0$). Temos ainda $f(1) = -e^{-1} < 0$, $f(2) = \ln 2 - e^{-2} > 0$. Assim, $f(1) < 0 < f(2)$, logo, pelo TVI, existe $x \in (1,2)$ tal que $f(x) = \ln x - e^{-x} = 0$, logo $\ln x = e^{-x}$.