LISTA 4
Cálculo 1 - 2023.2

Introdução à derivada
Derivadas de funções elementares
Regras de derivação

Exercício 1

Use a definição de derivada para para resolver os problemas a seguir.

1. Dada a função $f(x) = 3x^3 + 2x$, verifique que $f'(1) = 11$.
2. Dada a função $f(x) = \text{sen}(x)$, verifique que $f'(0) = 1$.

Exercício 2

Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(-2) = -4$ e $f'(-2) = e$. Calcule $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(-2+h)+4}{h}$

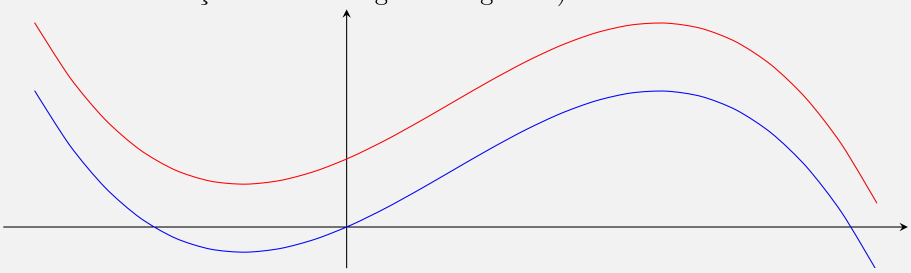
Exercício 3

Em cada um dos itens seguintes são indicados os valores de x_0, $f(x_0)$, $f'(x_0)$, para alguma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Obtenha a equação da reta tangente ao gráfico de f em $(x_0, f(x_0))$.

1. $x_0 = 1$, $f(x_0) = 3$ e $f'(x_0) = -1$,
2. $x_0 = \pi$, $f(x_0) = 0$ e $f'(x_0) = 2$,
3. $x_0 = 0$, $f(x_0) = 5$ e $f'(x_0) = \sqrt{2}$.

Exercício 4

A Figura a seguir contém o gráfico de duas funções, onde um gráfico é translação vertical do outro . Qual a diferença no valor de suas derivadas em cada ponto? (Observação: tente pensar apenas usando a informação de que a derivada mede a inclinação da reta tangente ao gráfico).



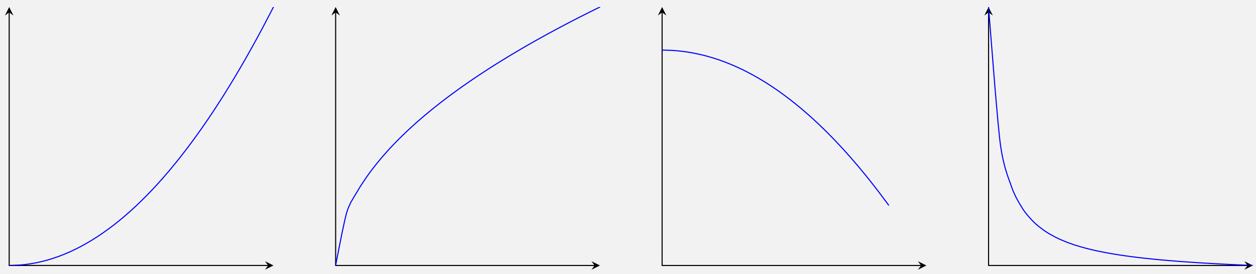
Exercício 5

Se uma pedra for lançada para cima no planeta Marte com velocidade de 10 m/s, sua altura (em metros) após t segundos é dada por $H(t) = 10t - 1,86t^2$.

1. Encontre a velocidade da pedra após 1 segundo.
2. Encontre a velocidade da pedra quando $t = a$.
3. Quando a pedra atinge a superfície?
4. Com que velocidade a pedra atinge a superfície?

Exercício 6

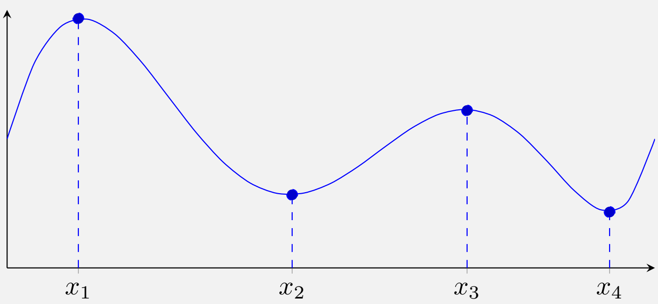
Cada uma das figuras a seguir é o esboço do gráfico de uma função. Identifique o sinal da derivada em cada ponto. (Observação: tente pensar geometricamente aqui).



: B: : :

Exercício 7

Na figura a seguir, verifique que $f'(x_i) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$. Identifique os intervalos em que a derivada é positiva. Identifique os intervalos em que a derivada é negativa. Pense geometricamente.



Exercício 8

Considere as funções f e g com domínio e contradomínio em $\mathbb{R}$. Ambas são diferenciáveis em todo o domínio. Os gráficos de f e g se intersectam perpendicularmente no ponto $(-1, 3)$. A reta tangente ao gráfico de f nesse ponto tem equação:

$$y = 3 + \frac{1}{2}(x + 1).$$

Quanto vale $g'(-1)$?

Exercício 9

Verifique se a função $f(x)$ é contínua em $x = 1$ e se é derivável em $x = 1$.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3-x}{2}, & \text{se } x < 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se } x < 1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Exercício 10

Seja f a função:

$$f(x) = \begin{cases} x \text{ sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

1. f é derivável em $x = 0$? f é contínua em $x = 0$?
2. O que acontece se $f(0) = 0$? f é derivável em $x = 0$? f é contínua em $x = 0$?

Exercício 11

Seja f a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{se } x \neq 0, \\ 1, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

1. f é derivável em $x = 0$? f é contínua em $x = 0$?
2. E se tivermos $f(0) = 0$? f é derivável em $x = 0$? f é contínua em $x = 0$?

Exercício 12

Derive as seguintes funções, usando apenas as propriedades básicas de derivação.

1. $f(x) = x^2 \text{sen} x \cos x$
2. $f(x) = \dfrac{x^5 - 1}{x^3 + x + 1}$
3. $f(x) = \sqrt{x} \cos x + x^{1/5}$

Exercício 13

Aplicando as propriedades da derivação, mostrar que

1. $(\sec x)' = \sec x \tan x$
2. $(\csc x)' = -\csc x \cot x$
3. $(\cot x)' = -\csc^2 x$

Exercício 14

Analise as afirmações a seguir. Identifique se são verdadeiras ou falsas.

a) Se $f(x) = x^2 - x$, $x \in \mathbb{R}$, f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e $f'(x) = 2x - 1$.

b) O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f em um ponto $(x, f(x))$ é $f'(x)$

c) A equação de qualquer reta não vertical pode ser escrita como $y = ax + b$, sendo a o coeficiente angular e b uma constante qualquer.

d) Das afirmações anteriores, concluímos que a equação da reta tangente ao gráfico de f em um ponto $(x, f(x))$ pode ser escrita como $y = f'(x)x + b$.

e) Da afirmação anterior, concluímos que a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - x$ em um ponto $(x, f(x))$, pode ser escrita como $y = (2x - 1)x + b$ para algum b constante em $\mathbb{R}$.

Exercício 15

Sejam f e g duas funções reais, diferenciáveis em $\mathbb{R}$. Seus gráficos se intersectam perpendicularmente em $(1, 3)$. Se $f(x) = 4x - 1$, qual a equação da reta tangente ao gráfico de g em $(1, 3)$?

Exercício 16

Considere:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x^2 & \text{se} \quad x \leq 1 \\ 2x^2 - 5x + 1 & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Calcule a derivada à esquerda e à direita em $x = 1$. Decida se a derivada existe em $x = 1$.

Exercício 17

Determine constantes a e b para que a função

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{se } x \leq 1 \\ ax^2 + b & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

seja derivável.

Exercício 18

Determine a equação da reta tangente ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x^2}$$

no ponto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Exercício extra

O exercício abaixo é para poderem praticar um pouco mais as regras de derivação.

Exercício 19

Derive cada função dos exercícios a seguir

1. $f(x) = 2\left(x^2 + 2x + 1\right)\tan(x)$
2. $f(x) = \sqrt{x}\ \operatorname{sen}(x) + x^{1/3}$
3. $f(x) = 2x\ \cos(x)\ \tan(x)$
4. $f(x) = \dfrac{x\sec(x)}{x^2 + 2x + 3}$

Solução do Exercício 1

1. Precisamos estudar o limite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^3 + 2x - 5}{x - 1}.$$

Como $3x^3 + 2x - 5 = (3x^2 + 3x + 5)(x - 1)$, temos

$$\lim_{x \to 1} \frac{(3x^2 + 3x + 5)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} 3x^2 + 3x + 5 = 11.$$

E, portanto, $f'(1) = 11$.

2. Procedendo como no exercício anterior,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1.$$

Lembrando que $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

E, portanto, $f'(0) = 1$.

Solução do Exercício 2

Utilizando a definição de derivada, temos que

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(h+x_0)-f(x_0)}{h}.$$

Tomando $h = x - x_0$ então
$h \to 0$ quando $x \to x_0$
e $x = x_0 + h$

Agora vamos substituir na fórmula acima os elementos dados no problemas: $x_0 = -2$, $f(x_0) = -4$, $f'(x_0) = e$

$$f'(-2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(-2+h)+4}{h} = e.$$

$+4 = -(-4) = -f(x_0)$

Solução do Exercício 3

Usando sempre a equação da reta tangente $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, temos

1. $y = 3 - (x - 1)$
2. $y = 2(x - \pi)$
3. $y = 5 + \sqrt{2}x$.

Solução do Exercício 4

Não há diferença. As funções são uma translação vertical uma da outra. A derivada mede o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico. No caso, em cada ponto x, a reta tangente tem o mesmo coeficiente angular.

Solução do Exercício 5

1. A velocidade é dada pela derivada da posição $v(t) = H'(t) = 10 - 3,72t$.
   Logo, $v(1) = 10 - 3,72 = 6,28\ m/s$.
2. $v(a) = 10 - 3,72a$.
3. A pedra atinge a superfície quando $H(t) = 0 \Leftrightarrow 10t - 1,86t^2 \Leftrightarrow t = 0$ ou $t = \frac{10}{1{,}86} \approx 5,4s$.
4. A pedra atinge a superfície com velocidade de $v\left(\frac{10}{1{,}86}\right) = 10 - 3,72 \cdot \frac{10}{1{,}86} = 10 - 20 = -10m/s$.

Solução do Exercício 6

As figuras A e B têm derivada positiva. Porém, nas figuras C e D, a derivada é negativa.

Solução do Exercício 7

Para ver que a derivada vale 0 em x_i, basta verificar que nesses pontos a tangente é paralela ao eixo x. Observando a direção da tangente, concluímos que a derivada é negativa em $(x_1, x_2) \cup (x_3, x_4)$. É positiva em $(0, x_1) \cup (x_2, x_3) \cup (x_4, \infty)$.

Solução do Exercício 8

Pela equação da reta tangente ao gráfico de g, sabemos que o coeficiente angular dessa reta é $1/2$. A reta tangente ao gráfico de g, nesse ponto, tem que ser perpendicular a essa reta (por hipótese) e, portanto, tem coeficiente angular -2. Logo, $g'(-1) = -2$.

Solução do Exercício 9

1. Para saber se $f'(1)$ existe, calculamos os limites laterais

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\frac{3-x}{2} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(3-x)-2}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{1-x}{2(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - 1}{x-1} = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x-1)} = \lim_{x\to 1^+} \left(-\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}\right) = -\frac{1}{2}.$$

   Assim o limite existe e

$$f'(1) = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}.$$

   Isto é, f é derivável em $x = 1$, e como sabemos que se a função tem derivada em um ponto, ela é contínua nesse ponto, logo, f é contínua em $x = 1$.

2. Vejamos se f é contínua em $x = 1$, para isso devemos calcular os limites laterais

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (-x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1.$$

   Logo, concluímos que f não é contínua em $x = 1$, e como sabemos que se a função tem derivada em um ponto, ela é contínua nesse ponto, f também não será derivável em $x = 1$.

Solução do Exercício 10

1. Pelo Teorema do Anulamento, temos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \neq 1 = f(0),$$

   então f não é contínua em $x = 0$, e como sabemos que se a função tem derivada em um ponto, ela é contínua nesse ponto, temos que f não é derivável em $x = 0$.

2. Como agora

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Temos que

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h \text{ sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \text{sen}\left(\frac{1}{h}\right). \textbf{ (Não existe)}$$

Assim f não é derivável em $x = 0$.

Mas, sabemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0)$, isto é, f é contínua em $x = 0$.

Solução do Exercício 11

1. Pelo Teorema do Anulamento temos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \neq 1 = f(0),$$

então f não é contínua em $x = 0$. Como sabemos que, se a função tem derivada em um ponto então ela é contínua nesse ponto, temos que f não é derivável em $x = 0$.

2. Como agora

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Pelo item 1 sabemos que agora $f(x)$ é contínua no ponto $x = 0$, pois temos que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0 = f(0).$$

Então não podemos aplicar o raciocínio do item 1 para concluir a solução. O que devemos fazer agora é aplicar diretamente a definição, isto é

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 \text{sen}\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} h \text{ sen}\left(\frac{1}{h}\right) = 0,$$

onde usamos o Teorema do Anulamento no último limite. Assim, a f é derivável em $x = 0$ (com $f'(0) = 0$).

Solução do Exercício 12

1. Aplicando a regra do produto duas vezes, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^2)'(\text{sen} x \cos x) + (x^2)(\text{sen} x \cos x)' \\ &= (2x)(\text{sen} x \cos x) + (x^2)((\text{sen} x)' \cos x + \text{sen} x (\cos x)') \\ &= 2x \text{sen} x \cos x + x^2((\cos x)\cos x + \text{sen} x(-\text{sen} x)) \\ &= 2x \text{sen} x \cos x + x^2(\cos^2 x - \text{sen}^2 x) \end{aligned}$$

2. Aplicando a regra do quociente, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^5-1)'(x^3+x+1) - (x^5-1)(x^3+x+1)'}{(x^3+x+1)^2} \\ &= \frac{(5x^4)(x^3+x+1) - (x^5-1)(3x^2+1)}{(x^3+x+1)^2} \end{aligned}$$

3. Aplicando a regras da soma, do produto e da potencia, obtemos

$$\begin{aligned}f'(x) &= (x^{1/2}\cos x)' + (x^{1/5})' \\ &= (x^{1/2})'\cos x + x^{1/2}(\cos x)' + \frac{1}{5}x^{1/5-1} \\ &= \frac{1}{2}x^{1/2-1}\cos x + x^{1/2}(-\mathrm{sen}x) + \frac{1}{5}x^{-4/5} \\ &= \frac{1}{2}x^{-1/2}\cos x - x^{1/2}\mathrm{sen}x + \frac{1}{5}x^{-4/5}\end{aligned}$$

Solução do Exercício 13

1. Da definição das funções trigonomêtricas e usando a regra do quociente, obtemos

$$(\sec x)' = \left(\frac{1}{\cos x}\right)' = \frac{(1)'\cos x - 1(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{(0)\cos x - 1(-\mathrm{sen}x)}{\cos^2 x} = \frac{\mathrm{sen}x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x}\frac{\mathrm{sen}x}{\cos x} = \sec x \tan x$$

2. Da definição das funções trigonomêtricas e usando a regra do quociente, obtemos

$$(\csc x)' = \left(\frac{1}{\mathrm{sen}x}\right)' = \frac{(1)'\mathrm{sen}x - 1(\mathrm{sen}x)'}{\mathrm{sen}^2x} = \frac{(0)\mathrm{sen}x - 1(\cos x)}{\mathrm{sen}^2x} = -\frac{\cos x}{\mathrm{sen}^2x} = -\frac{1}{\mathrm{sen}x}\frac{\cos x}{\mathrm{sen}x} = -\csc x \cot x$$

3. Da definição das funções trigonomêtricas e usando a regra do quociente, obtemos

$$\begin{aligned}(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\mathrm{sen}x}\right)' &= \frac{(\cos x)'\mathrm{sen}x - \cos x(\mathrm{sen}x)'}{\mathrm{sen}^2x} \\ &= \frac{(-\mathrm{sen}x)\mathrm{sen}x - \cos x(\cos x)}{\mathrm{sen}^2x} \\ &= \frac{-\mathrm{sen}^2x - \cos^2 x}{\mathrm{sen}^2x} = \frac{-1}{\mathrm{sen}^2x} = -\csc^2 x\end{aligned}$$

Solução do Exercício 14

(a), (b) e (c) são verdadeiras. (d) é falsa pois o coeficiente angular em cada ponto é uma constante. Assim, dado x_0, a equação da reta tangente poderá ser escrita como: $y = f'(x_0)x + b$. (e) é falso pela mesma razão que (d) é falso; em particular, a equação apresentada sequer é uma equação de reta.

Solução do Exercício 15

As duas retas são perpendiculares. O coeficiente angular da tangente ao gráfico de f é 4. Portanto, o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de g é $-1/4$. O ponto $(1, 3)$ pertence à reta. Logo, a equação da reta tangente ao gráfico de g em $(1, 3)$ pode ser escrita como $y = 3 - (1/4)(x - 1)$.

Solução do Exercício 16

Derivada à esquerda:

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^-}\frac{(-x^3 + x^2) - 0}{x - 1} = -1$$

Derivada à direita:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1^+}\frac{(2x^2 - 5x + 1) - 0}{x - 1} = -\infty$$

Não existe a derivada à direita, portanto a função não é diferenciável no ponto $x = 1$.

Solução do Exercício 17

A função precisa ser contínua, logo,

$$a+b=\lim_{x\to 1^+}(ax^2+b)=f(1)=1.$$

Assim, $a+b=1$, e então $b=1-a$.
Além disso, a função é derivável em $x=1$, logo

$$3=3\cdot 1^2=f'_-(1)=\lim_{x\to 1+}\frac{ax^2+b-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{ax^2+1-a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1+}\frac{a(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1+}a(x+1)=2a.$$

Logo, $2a=3$, e então $a=3/2$. Com isso, $b=1-3/2=-1/2$.

Solução do Exercício 18

Nós sabemos que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $\left(\frac{\pi}{2},0\right)$ é dada pela equação $y=f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Assim, precisamos calcular $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Pela regra de derivação do quociente, temos que

$$f'(x)=\frac{-x^2sen(x)-2xcos(x)}{x^4},$$

e portanto, avaliando em $x=\frac{\pi}{2}$ obtemos

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2.$$

Concluimos assim que a reta tangente pedida tem equação $y=-\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$.

Solução do Exercício 19

1. $f'(x)=2\left(x^2+2x+1\right)\sec^2(x)+2(2x+2)\tan(x)=2(x+1)\left[(x+1)\sec^2(x)+2\tan(x)\right]$
2. $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\operatorname{sen}(x)+\sqrt{x}\cos(x)+\dfrac{1}{3}x^{-2/3}=\dfrac{\operatorname{sen}(x)+2x\cos(x)}{2\sqrt{x}}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
3. $f(x)=2x\ \cos(x)\tan(x)=2x\operatorname{sen}(x)\implies f'(x)=2(\operatorname{sen}(x)+x\ \cos(x))$
4. $$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{\left(x^2+2x+3\right)\left(x\sec(x)\tan(x)+\sec(x)\right)-\left[x(\sec(x))(2x+2)\right]}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\\&=\frac{\left[3-x^2+\left(x^3+2x^2+3x\right)\tan(x)\right]\sec(x)}{\left(x^2+2x+3\right)^2}\end{aligned}$$