GMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

LISTA 5
Cálculo 1 - 2023.2

Regra da Cadeia

Exercício 1

Derive as seguintes funções usando a Regra da Cadeia

1. $f(x) = \cos^3 x - (5x^3+1)^{1/3}$
2. $f(x) = \operatorname{sen}(8x) + \sqrt{x^4 + x + 2}$

Exercício 2

Sejam $f(x) = \sqrt{2x+1}$ e $g(x) = \sqrt{\tan(x)}$. Calcule $(f \circ g)'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercício 3

Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Calcular $f'(x)$.

Exercício 4

Considere f uma função derivável e g definida por $g(x) = \big(f(\cos x)\big)^2$. Sabendo que $f(0) = 1$ e $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$, calcule $g'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Exercício 5

$f(x) = \operatorname{sen}(x)$ e $g(x) = 2x - 1$. Que informação(ções) você necessita sobre a função w para calcular $(w \circ f \circ g)'(\pi)$?

Exercício 6

São dadas as funções $f(x) = \cos(x)$ e $w(x) = x^2 + 2x$. Calcule $(f \circ g \circ w \circ h)'(1)$ usando a tabela a seguir.

$2 \xmapsto{h} 1$	$0 \xmapsto{h'} \pi$	$1 \xmapsto{g} e$	$\pi/2 \xmapsto{g'} \sqrt{3}$
$1 \xmapsto{h} 2$	$1 \xmapsto{h'} 4$	$2 \xmapsto{g} \sqrt{5}$	$2 \xmapsto{g'} -9$
$3 \xmapsto{h} -4$	$5 \xmapsto{h'} -2$	$3 \xmapsto{g} -2$	$3 \xmapsto{g'} -3$
$8 \xmapsto{h} \pi/2$	$3 \xmapsto{h'} \sqrt{2}$	$8 \xmapsto{g} \pi/2$	$8 \xmapsto{g'} \sqrt{7}$

Exercício 7

Considere $h(x) = \sqrt{x^2}$, $x \in \mathbb{R}^+$. Para calcular $h'(2)$, Sócrates definiu $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$. Concluiu que $h = f \circ g$. Calculou $f'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ e $g'(2) = 4$. Usando a Regra da cadeia, multiplicou os dois valores para obter $h'(2) = 4 \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$. Aristóteles, que também queria calcular $h'(2)$, escreveu: $h(x) = \sqrt{x^2} = x$ e, portanto, $h'(x) = 1$ para todo x. Quem acertou? Quem errou e por quê?

Exercícios extra

Os exercícios abaixo são para poderem praticar um pouco mais as regras de derivação.

Exercício 8

Derive cada função dos exercícios a seguir

1. $f(x) = \cos^2(x)$
2. $f(x) = \dfrac{\left(x^2 - 2x + 2\right)^2}{x^4 + x^2 + 1}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{\left(x^2 + 2\right)^2}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{2x^4 + 2x}}{\cos^2(x)}$
5. $f(x) = (\operatorname{sen}(2x))\left(x^3 + 2x\right)^{2/3}$
6. $F(u) = \dfrac{u^3 - 3u^2}{\left(u^4 + 1\right)^{5/2}}$
7. $G(r) = \sqrt[5]{\dfrac{2r^2 - 2}{r - 1}}$
8. $M(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$
9. $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^4}\right) & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$

Solução do Exercício 1

1. Aplicando Regra da Cadeia

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3[\cos^2 x](\cos x)' - \frac{1}{3}(5x^3 + 1)^{1/3-1}(5x^3 + 1)' \\ &= 3[\cos^2 x](-\operatorname{sen} x) - \frac{1}{3}(5x^3 + 1)^{-2/3}(15x^2) \\ &= -3\operatorname{sen} x \cos^2 x - 5x^2(5x^3 + 1)^{-2/3} \end{aligned}$$

2. Aplicando a Regra da Cadeia

$$\begin{aligned} f(x) &= (\operatorname{sen}(8x)) + ((x^4 + x + 2)^{1/2}) \\ &= [\cos(8x)](8x)' + \frac{1}{2}(x^4 + x + 2)^{1/2-1}(x^4 + x + 2)' \quad = [\cos(8x)](8) + \frac{1}{2}(x^4 + x + 2)^{-1/2}(4x^3 + 1) \\ &= 8\cos(8x) + \frac{1}{2}(4x^3 + 1)(x^4 + x + 2)^{-1/2} \end{aligned}$$

Solução do Exercício 2

Pela Regra da Cadeia,

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

onde

$$f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2x + 1}} \quad \text{e} \quad g'(x) = \frac{\sec^2(x)}{2\sqrt{\operatorname{tg}(x)}}.$$

Portanto, se $x = \pi/4$, temos

$$(f \circ g)'(\pi/4) = f'(g(\pi/4))g'(\pi/4) = f'(1)g'(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{2}{2.1} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Solução do Exercício 3

Vamos dividir a prova em dois casos:

- Se $x \neq 0$, aplicando a Regra do Produto e a Regra da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= (x^2)' \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2\left(\text{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right)' \\ &= 2x \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{1}{x}\right)' \\ &= 2x \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= 2x \text{ sen}\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

- Se $x = 0$, pela Lista 6 (exercício 14), já sabemos que $f'(0) = 0$.

Solução do Exercício 4

Aplicando a Regra da Cadeia, temos que

$$g'(x) = 2(f(\cos x))[f(\cos x)]' = 2(f(\cos x))(f'(\cos x))(\cos x)' = 2(f(\cos x))(f'(\cos x))(-\text{sen}x),$$

logo

$$g'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(f(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right))\right)\left(f'(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right))\right)\left(-\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2(f(0))(f'(0))(-1) = 2(1)(-\frac{1}{2})(-1) = 1.$$

Solução do Exercício 5

Analisando a ordem de composição podemos representar, esquematicamente, como:

$$\begin{array}{ccccccc} x & \xrightarrow{g} & 2x-1 & \xrightarrow{f} & \text{sen}(2x-1) & \xrightarrow{w} & w(\text{sen}(2x-1)) \\ \pi & \longmapsto & 2\pi - 1 & \longmapsto & \text{sen}(2\pi-1) & \longmapsto & w(\text{sen}(2\pi-1)) \end{array}$$

Usando a Regra da Cadeia, concluímos que é suficiente conhecer o valor de $w'(\sin(2\pi - 1))$.

Solução do Exercício 6

Representamos a composição por:

$$1 \overset{h}{\longmapsto} 2 \overset{w}{\mapsto} 8 \overset{g}{\longmapsto} \pi/2 \overset{f}{\longmapsto} f(\pi/2)$$

Usando a Regra da Cadeia vemos que:

$$(f \circ g \circ w \circ h)'(1) = f'(\pi/2) \cdot g'(8) \cdot w'(2) \cdot h'(1)$$

substituindo os valores, calculamos: $(f\circ g\circ w\circ h)'(1) = -24\sqrt{7}$

Solução do Exercício 7

Aristóteles fez certo. Sócrates usou a Regra da Cadeia errado pois deveria ter levado em conta $f'(g(2)) = f'(4)$, que daria o resultado certo.

Solução do Exercício 8

1. $f'(x) = -2\cos(x)\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(2x)$
2. $$f'(x) = \frac{\left(x^4+x^2+1\right)\left[2\left(x^2-2x+2\right)(2x-2)\right] - \left(x^2-2x+2\right)^2\left(4x^3+2x\right)}{\left(x^4+x^2+1\right)^2} = \frac{2\left(x^2-2x+2\right)\left(2x^4-3x^3-2\right)}{\left(x^4+x^2+1\right)^2}$$
3. $f'(x) = -2\left(x^2+2\right)^{-3}(2x) = \dfrac{-4x}{\left(x^2+2\right)^3}$
4. $$f'(x) = \frac{2\sqrt[4]{2x^4+2x}\cos(x)\sin(x) + \frac{\left(8x^3+2\right)\cos^2(x)}{4\left(2x^4+2x\right)^{\frac{3}{4}}}}{\cos^4(x)}$$
5. $$f'(x) = \operatorname{sen}(2x)\,(2/3)\left(x^3+2x\right)^{-1/3}\left(3x^2+2\right) + \cos(2x)\,(2)\left(x^3+2x\right)^{2/3} = \frac{2\left(3x^2+2\right)\operatorname{sen}(2x) + 6\left(x^3+2x\right)\cos(2x)}{3\left(x^3+2x\right)^{1/3}}$$
6. $$F'(u) = \frac{\left(u^4+1\right)^{5/2}\left(3u^2-6u\right) - \left(u^3-3u^2\right)(5/2)\left(u^4+1\right)^{3/2})\left(4u^3\right)}{\left(u^4+1\right)^5} = \frac{-7u^6+24u^5+3u^2-6u}{\left(u^4+1\right)^{7/2}}$$
7. $G'(r) = \dfrac{1}{5}(2r+2)^{-4/5}(2) = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{(2r+2)^4}}$
8. $$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\left(x+\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}[1 + (\sqrt{x+\sqrt{x}})'] = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(x + \sqrt{x})'] = \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}[1 + \frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}(1 + \frac{1}{2\sqrt{x}})] = \frac{1+\dfrac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$$
9. Utilizando as regras de derivação calculamos $f'(x)$, para $x \neq 0$. Utilizando a definição por limite $f'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^3\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^4}\right) - f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^4}\right) = 0$ (pelo Teo. Anulamento). Então, $$f'(x) = \begin{cases} 3x^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^4}\right) - \dfrac{4}{x^2}\cos\left(\dfrac{1}{x^4}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$