

## Cálculo I - Turma Q2

Professor: Wodson Mendson - [oliveirawodson@gmail.com](mailto:oliveirawodson@gmail.com)

Entrega: até o dia 21/12/2024 podendo ser por email (digitalizado ou foto, desde que legível).

### Questões

**Exercício 1.** Refazer a P1 que se encontra no link: <https://wodson.org/P1.pdf>

**Exercício 2.** Mostre que para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$  temos que

$$|\cos(a) - \cos(b)| \leq |a - b| \quad e \quad |\sin(a) - \sin(b)| \leq |a - b|$$

**Exercício 3.** Verifique se a função

$$f: (-1, 0) \longrightarrow (0, 1) \quad x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$$

é bijetiva e, em caso afirmativo, calcule sua inversa  $f^{-1}$ . Justifique e esboçe seu gráfico.

**Exercício 4.** Seja  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função ímpar. Demonstre que sua inversa também é ímpar. O que podemos dizer sobre a inversa de uma função  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  par? Ela existe? Se existir, ela é par também? Justifique sua resposta.

**Exercício 5.** Demonstre, justificando cada passo, as derivadas seguintes:

1.

$$\log_a(x)' = \frac{1}{\ln(a)x}$$

2.

$$\arccos(x)' = \frac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

3.

$$\arctan(x)' = \frac{1}{1 + x^2}$$

**Exercício 6.** Mostre que a função  $f(x) = \arccos(x) + \arcsin(x)$  é constante em  $[-1, 1]$  e determine o valor da constante.

**Exercício 7.** Encontre a derivada das funções abaixo:

1.

$$f(x) = x^2 e^x$$

3.

$$f(x) = e^{x^3 \ln(x)}$$

5.

$$f(x) = 3^{\sin(3x)}$$

7.

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

2.

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$$

4.

$$f(x) = \frac{10^x}{\ln(10)}$$

6.

$$f(x) = x^\pi \pi^x$$

8.

$$f(x) = \sin(2x)^{4x}$$

**Exercício 8.** Encontre os seguintes limites. Você pode usar L'Hôpital's onde achar apropriado. (Justifique)

1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{\cos(x) - 1}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2}$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^x}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 4^x}{\sin(\pi x)}$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\tan(3x)}{\tan(5x)}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/\ln(x)}$$

**Exercício 9.** *Relembre que uma aproximação polinomial de ordem  $n$  de uma função  $f(x)$  num ponto  $a \in \mathbb{R}$ , consiste no seguinte polinômio:*

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f'''(a)(x-a)^3}{3 \cdot 2} + \dots + \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n(n-1)(n-2)\dots 1}.$$

Determine aproximações lineares em cada item abaixo:

- $f_1(x) = \sin(x)$  em  $a = \pi/4$  de ordem  $n = 4$
- $f_2(x) = \sqrt{x}$  em  $a = 100$  de ordem  $n = 4$
- $f_3(x) = x^{1/3}$  em  $a = 8$  de ordem  $n = 3$
- $f_4(x) = \arctan(x)$  em  $a = 3$  de ordem  $n = 3$
- $f_5(x) = e^x$  em  $a = 1$  de ordem  $n = 4$
- $f_6(x) = \ln(x)$  em  $a = 1$  de ordem  $n = 4$

Usando os itens acima determine uma aproximação para os valores seguintes:  $f_1(1)$ ,  $f_2(102)$ ,  $f_3(9)$  e  $f_5(2)$ . Compare com o valor exibido em calculadora.

**Exercício 10.** *Usando derivação implícita, determine a equação da reta tangente ao gráfico da função nos pontos indicados.*

1.  $y^2 - x^3 + 5x = 0$  em  $P = (-1, 2)$

2.  $y^2 - x^3 - 1$  em  $P = (2, 3)$

3.  $y^2 - 4x^2 = 1$  em  $P = (1, \sqrt{5})$

4.  $\sin(y^2 - 1) = y^2 + x$  em  $P = (-1, 1)$

**Exercício 11.** *Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$ . Calcule  $y''$  em função de  $x$  e  $y$  usando derivação implícita:  $a^2y^2 + b^2x^2 = 1$*

**Exercício 12.** *Suponha que lhe foi dada uma fórmula para uma função  $f(x)$ .*

- Como você determina onde  $f$  é crescente ou decrescente?
- Como você determina onde o gráfico de  $f$  é côncavo ou convexo?
- Como você localiza os pontos críticos? E de inflexão?

**Exercício 13.** Encontre onde a função  $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$  é crescente e onde ela é decrescente. Determine ao menos um ponto crítico de  $f(x)$

**Exercício 14.** Demonstre que se  $f$  e  $g$  são funções concavas e se  $a \geq 0, b \geq 0$  então a função  $h(x) = af(x) + bg(x)$  continua concava. O que podemos dizer sobre  $h(x)$  se  $f$  e  $g$  forem convexas?

**Exercício 15.** Nas funções abaixo determine: as assíntotas vertical e horizontal (se tiver), o intervalo onde é crescente, valores máximos e mínimos locais, os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão. Justifique todos os seus passos. Use essas informações para esboçar o gráfico das funções.

1.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - x$$

5.

$$f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 6$$

2.

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$$

6.

$$f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$$

3.

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

7.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 8$$

4.

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1$$

8.

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$$

**Exercício 16.** Determine o ponto da parábola  $y = x^2 + 1$  que está mais próximo do ponto  $P = (3, 1)$ .