Cálculo IV - Turma R2

Professor: Wodson Mendson - **oliveirawodson@gmail.com**

Entrega: até o dia 23/12/2024 podendo ser por email (digitalizado ou foto, desde que legível).

Questões

Exercício 1. *Encontre a Transformada de Laplace das seguintes funções:*

1. $$f(t) = \operatorname{sen}(2t)\cos(2t)$$

2. $$f(t) = te^{2t}\operatorname{sen}(3t)$$

3. $$f(t) = (t+3)u_7(t)$$

4. $$f(t) = t^2u_3(t)$$

5. $$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad 0 \le t < 2 \\ t^2 - 4t + 4 & se \quad t \ge 2 \end{cases}$$

6. $$f(x) = \begin{cases} 0 & se \quad t < \pi \\ t - \pi & se \quad \pi \le t < 2\pi \\ 0 & se \quad t \ge \pi \end{cases}$$

7. $$f(x) = \begin{cases} t & se \quad 0 \le t < 1 \\ e^t & se \quad t \ge 1 \end{cases}$$

8. $$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(t) & se \quad 0 \le t < \pi \\ 0 & se \quad t \ge \pi \end{cases}$$

Exercício 2. *Demonstre, usando a definição de Transformada de Laplace, as seguintes fórmulas:*

1. $$\mathcal{L}\{t\cos(at)\} = \frac{s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^2} \qquad s > 0$$

2. $$\mathcal{L}\{t\operatorname{sen}(at)\} = \frac{2as}{(s^2 + a^2)^2} \qquad s > 0$$

3. $$\mathcal{L}\{\operatorname{senh}(at)\} = \frac{a}{s^2 - a^2} \qquad s > a$$

4. $$\mathcal{L}\{\cosh(at)\} = \frac{s}{s^2 - a^2} \qquad s > a$$

Exercício 3. *Demonstre que toda função admissível possui Transformada de Laplace. Dê um exemplo de uma função $f\colon [0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ que não admite transformada de Laplace e justifique.*

Exercício 4. *Encontre a transformada de Laplace inversa:*

1. $$F(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2-1)}$$

2. $$F(s) = \frac{2s+3}{s^2+4s+13}$$

3. $$F(s) = \frac{e^{-3s}}{(s-2)}$$

4. $$F(s) = \frac{1+e^{-2s}}{(s^2+6)}$$

5.
$$F(s) = \frac{3s - s^2}{(s^2+4)^2}$$

6.
$$F(s) = \frac{2s^3 - 5s^2 + 18s - 10}{(s^2+9)(s^2+2)}$$

7.
$$F(s) = \frac{2}{s^2(s+2)(s+1)} + \frac{1}{(s+2)(s+1)}$$

8.
$$F(s) = \frac{2s - 5}{s(s^2+s-12)}$$

9.
$$F(s) = \frac{5e^{-6s} - 3e^{-11s}}{(s+2)(s^2+9)}$$

10.
$$F(s) = \frac{se^{-4s}}{(3s+2)(s-2)}$$

Exercício 5. *Demonstre que a transformada de Laplace de* $f(t) = 1/\sqrt{t}$ *é* $\sqrt{\pi/s}$. *Dica: use o fato que* $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}/2$

Exercício 6. *Demonstre ou exiba um contra-exemplo: toda função limitada possui transformada de Laplace.*

Exercício 7. *Seja* $f\colon[0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *e suponha que* f, f' *e* f'' *sejam funções admissíveis em* $[0,\infty)$ *e que* f''' *seja contínua por partes. Demonstre que vale a fórmula seguinte:*

$$\mathcal{L}\{f'''\} = s^3\mathcal{L}\{f\} - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

Use isso para resolver o seguinte ***PVI****:*

$$y''' + y'' = e^t + t + 1 \qquad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

Exercício 8. *Use o Teorema de Convolução para demonstrar que*

$$\int_0^t \cos(u)\,\mathrm{sen}(t-u)du = \frac{t\,\mathrm{sen}(t)}{2}$$

Exercício 9. *Econtre a solução dos seguintes PVI's:*

1.
$$\begin{cases} y'' - 2y' - y = 1 \\ y(0) = -1 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

2.
$$\begin{cases} y'' - 3y' - 10y = 1 \\ y(0) = -1 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

3.
$$\begin{cases} y'' + 4y = 4u_5(t) \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} y'' + 4y' + 4y = e^t \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

5.
$$\begin{cases} y'' - 9y' = 5e^{-2t} \\ y(0) = 1 \quad y'(0) = 2 \end{cases}$$

6.
$$\begin{cases} y'' + 4y' + 3y = 0 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

7.
$$\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = 3e^{3t} \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

8.
$$\begin{cases} y''' - 4y' = \mathrm{senh}(t) \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \quad y''(0) = 0 \end{cases}$$

9.

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = t \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

10.

$$\begin{cases} y'' + y = \cos(t) \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

Exercício 10. *Equações da forma*

$$f(t) = g(t) + \int_0^t h(t,u)f(u)du \qquad g(t) = \int_0^t h(t,u)f(u)du$$

são chamadas de ***equações integrais****, onde $f(t)$ é uma função a determinar. Quando $h(t,u)$ é da forma particular: $h(t,u) = h(t-u)$ as integrais representam convoluções. Nesse caso, a Transformada de Laplace pode ser usada para encontrar sua solução. Use essa ideia para resolver as seguintes equações integrais:*

1.

$$x(t) = e^{-t} + \int_0^t \operatorname{sen}(t-u)x(u)du$$

2.

$$x(t) = 1 + \int_0^t \cos(t-u)x(u)du$$

3.

$$x(t) = \operatorname{sen}(t) + \int_0^t e^u x(t-u)du$$

4.

$$x'(t) + \int_0^t x(t-u)du = \cos(t) \qquad x(0) = 0$$

5.

$$x(t) = \int_0^t \operatorname{sen}(u)x(t-u)du$$

6.

$$te^{-at} = \int_0^t x(u)x(t-u)du$$

Exercício 11. *Seja $a > 0$ e considere a função $f(t) = a^{[t]}$, onde $[t]$ denota o maior inteiro que é menor que t. Por exemplo, $[5,2] = 5$, $[1,8] = 1$ e $[2,1] = 2$. Demonstre que*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1-e^{-s}}{s(1-ae^{-s})} \qquad s > max\{0, \ln(a)\}$$

Exercício 12. *Mostre que a função $f(t) = [t]$ possui transformada de Laplace*

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$$

Exercício 13. *Uma equação de diferenças consiste numa equação que envolve uma função $y(t)$ e os valores da função em diferentes argumentos como $y(t+a)$ onde a é uma constante. Por exemplo,*

$$y(t) - 3y(t+1) + 2y(t-1) = e^t \qquad y(t)y(t+3) = \operatorname{sen}(t)$$

são alguns exemplos de equações de diferenças. Um caso particular, consiste em relações de recorrências, como por exemplo: $a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$ com $a_0 = 0, a_1 = 1$. O problema aqui é encontrar uma fórmula geral para a_n em função de n. Fazendo $y(t) = a_n$ para $n \leq t < n+1$, obtemos uma equação de diferenças: $y(t+2) - 3y(t+1) + 2y(t) = 0$ e podemos usar a Transformada de Laplace para resolver tais equações. Faça isso para as seguintes equações:

1.

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0 \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

2.

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 0 \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = -1$$

3.

$$a_{n+2} - 7a_{n+1} + 12a_n = 2^n \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = -1$$

4.

$$a_{n+1} + a_n = 1 \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

5.

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 0 \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

6.

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 3^n \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

Exercício 14. *A sequência de Fibonacci é dada por*

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = 1$$

Deduza, usando transformada de Laplace, que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Exercício 15. *Resolva as equações:*

1.

$$y(t+1) + y(t) = 1 \qquad y(t) = 0, \quad se \quad t < 1$$

2.

$$y(t) + y(t-1) = e^t \qquad y(t) = 0 \quad se \quad t \leq 0$$

3.

$$y'(t) + y(t-1) = t \qquad y(t) = 0 \quad se \quad t \leq 0$$

Exercício 16. *Considere a relação de recorrência:*

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4n + 2 \qquad a_0 = 0, \quad a_1 = 1.$$

Encontre a_n.