# Não-algebricidade de folheações via redução **mod** 2

Wodson Mendson

**Universidade Federal Fluminense - UFF**
**Seminários do IME/UERJ**

16 de Outubro, 2025

# Estrutura

- **Parte I:** Introdução
- **Parte II:** Folheações em característica $p$
- **Parte III:** Um critério via redução **mod** 2

# Parte I: Introdução

# Folheações

**Hoje:** folheações = folheações em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$

# Folheações

**Hoje:** folheações = folheações em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$

Seja $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

Uma **folheação**, $\mathcal{F}$, de grau $d$ no plano projetivo $\mathbb{P}^2_K$ é dada, módulo $K^*$, por elemento não-nulo $\omega \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_K, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_K}(d+2))$ com conjunto singular finito.

# Folheações

**Hoje:** folheações = folheações em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$

Seja $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

Uma **folheação**, $\mathcal{F}$, de grau $d$ no plano projetivo $\mathbb{P}^2_K$ é dada, módulo $K^*$, por elemento não-nulo $\omega \in \mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_K, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_K}(d+2))$ com conjunto singular finito.

**Explicitamente:**

- Pela sequencia exata de Euler, podemos ver $\omega$ como uma 1-forma projetiva:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

em $\mathbb{A}^3_K$ tais que $A, B, C \in K[x, y, z]$ são homogêneos de grau $d + 1$ e $Ax + By + Cz = 0$ com

$$\mathrm{sing}(\omega) = \mathcal{Z}(A, B, C) = \{p \in \mathbb{P}^2_K \mid A(p) = B(p) = C(p) = 0\}$$

finito.

# Folheações via campos

Suponha que a característica de $K$ não divide $d + 2$.

# Folheações via campos

Suponha que a característica de $K$ não divide $d + 2$.

- Uma folheação de grau $d$ em $\mathbb{P}^2_K$ é determinada, modulo $K^*$, por um campo homogêneo em $\mathbb{A}^3_K$:

$$v = A_0\partial_x + A_1\partial_y + A_2\partial_z \in \mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^3_K)$$

onde $A_0, A_1, A_2 \in K[x, y, z]$ são homogêneos de grau $d$ com

$$\mathbf{div}(v) = \partial_x A_0 + \partial_y A_1 + \partial_z A_2 = 0$$

# Folheações via campos

Suponha que a característica de $K$ não divide $d+2$.

- Uma folheação de grau $d$ em $\mathbb{P}^2_K$ é determinada, modulo $K^*$, por um campo homogêneo em $\mathbb{A}^3_K$:

$$v = A_0\partial_x + A_1\partial_y + A_2\partial_z \in \mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^3_K)$$

onde $A_0, A_1, A_2 \in K[x,y,z]$ são homogêneos de grau $d$ com

$$\mathbf{div}(v) = \partial_x A_0 + \partial_y A_1 + \partial_z A_2 = 0$$

O seguinte resultado demonstra a equivalência:

**Proposição**

[a] *Existe uma bijeção entre o conjunto de 1-formas projetivas em $\mathbb{A}^3_K$ de grau $d+1$ e campos homogêneos de grau $d$ com divergente nulo.*

[a] Jouanolou - **Equations de Pfaff algébriques**

## Exemplo

Suponha que $\mathcal{F}$ seja dada pela 1-forma:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

## Exemplo

Suponha que $\mathcal{F}$ seja dada pela 1-forma:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

O campo homogêneo de grau $d$ com divergente zero associado é:

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

## Exemplo

Suponha que $\mathcal{F}$ seja dada pela 1-forma:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

O campo homogêneo de grau $d$ com divergente zero associado é:

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

**Exemplo:** Seja $\alpha \in K^*$ e considere:

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

# Exemplo

Suponha que $\mathcal{F}$ seja dada pela 1-forma:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

O campo homogêneo de grau $d$ com divergente zero associado é:

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

**Exemplo:** Seja $\alpha \in K^*$ e considere:

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

$\omega$ define uma folheação de grau um em $\mathbb{P}^2_K$ e o campo associado é dado por:

$$v = \left(\frac{2\alpha - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha}{3}\right) z\partial_z$$

## Curvas invariantes

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada por uma 1-forma $\omega$.

# Curvas invariantes

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada por uma 1-forma $\omega$.

Seja $C = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^2_K$ uma curva algébrica dada por um polinômio irredutível $F \in K[x, y, z]$.

# Curvas invariantes

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada por uma 1-forma $\omega$.

Seja $C = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^2_K$ uma curva algébrica dada por um polinômio irredutível $F \in K[x, y, z]$.

**Definição**

*A curva $C$ é **$\mathcal{F}$-invariante**, ou é uma **solução algébrica de $\mathcal{F}$**, se existe uma 2-forma homogênea $\sigma$ em $\mathbb{A}^3_K$ tal que*

$$dF \wedge \omega = F\sigma$$

## Curvas invariantes

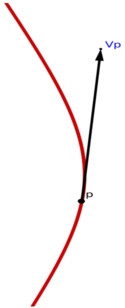
Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada por uma 1-forma $\omega$.

Seja $C = \{F = 0\} \subset \mathbb{P}^2_K$ uma curva algébrica dada por um polinômio irredutível $F \in K[x, y, z]$.

**Definição**

*A curva $C$ é **$\mathcal{F}$-invariante**, ou é uma **solução algébrica de $\mathcal{F}$**, se existe uma 2-forma homogênea $\sigma$ em $\mathbb{A}^3_K$ tal que*

$$dF \wedge \omega = F\sigma$$



## Exemplo: folheações com curvas algébricas invariantes

- a folheação dada por

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

possui $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ e $\{z = 0\}$ como curvas algébricas invariantes.

# Exemplo: folheações com curvas algébricas invariantes

- a folheação dada por

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

possui $\{x = 0\}$, $\{y = 0\}$ e $\{z = 0\}$ como curvas algébricas invariantes.

- **folheações logarítmicas**: sejam $d_1, d_2, \ldots, d_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $F_1, \ldots, F_r \in K[x, y, z]$ polinômios homogêneos com $d_i = \deg(F_i)$. Suponha que $F_1, \ldots, F_r$ são irredutíveis e coprimos. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K^*$ tais que $\sum_{i=1}^r \alpha_i d_i = 0$ e considere a 1-forma

$$\Omega = F_1 F_2 \cdots F_{r-1} F_r \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \frac{dF_i}{F_i}.$$

A 1-forma $\Omega$ define, $\mathcal{F}_\Omega$, uma folheação de grau $d = \sum_i d_i - 2$ em $\mathbb{P}^2_K$. Dizemos que $\mathcal{F}_\Omega$ é uma **folheação logarítmica** de tipo $(d_1, \ldots, d_r)$. As curvas $C_i = \{F_i = 0\}$ são $\mathcal{F}_\Omega$-invariantes.

# Jouanolou: folheações sem curvas algébricas invariantes

Seja $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ e considere a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada pela 1-forma:

$$\mathcal{F}_d \colon \Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

$$v_d = z^d \partial_x + x^d \partial_y + y^d \partial_z$$

[1] Zoladek - **New examples of holomorphic foliations without algebraic leaves**

[2] J.V. Pereira, P. F. Sanchez - **Automorphisms and non-integrability**

[3] Claudia R. Alcántara - **Foliations on $\mathbb{CP}^2$ of degree $d$ with a singular point with Milnor number $d^2 + d + 1$**

[4] Claudia R. Alcántara, Petra Rubí Pantaleón - **Foliations on $\mathbb{CP}^2$ with a unique singular point without invariant algebraic curves**

[5] S. C. Coutinho, Filipe Ramos Ferreira - **Foliations with one singularity and finite isotropy group**

[6] Percy Fernández, Liliana Puchuri, Rudy Rosas - **Foliations on $\mathbb{P}^2$ with only one singular point**

# Jouanolou: folheações sem curvas algébricas invariantes

Seja $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ e considere a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada pela 1-forma:

$$\mathcal{F}_d \colon \Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

$$v_d = z^d \partial_x + x^d \partial_y + y^d \partial_z$$

**Teorema (Jouanolou)**

[a] *Se $K = \mathbb{C}$ a folheação $\mathcal{F}_d$ não tem curvas algébricas invariantes*

[a] Jouanolou - **Equations de Pfaff algébriques**

[1] Zoladek - **New examples of holomorphic foliations without algebraic leaves**

[2] J.V. Pereira, P. F. Sanchez - **Automorphisms and non-integrability**

[3] Claudia R. Alcántara - **Foliations on $\mathbb{CP}^2$ of degree $d$ with a singular point with Milnor number $d^2 + d + 1$**

[4] Claudia R. Alcántara, Petra Rubí Pantaleón - **Foliations on $\mathbb{CP}^2$ with a unique singular point without invariant algebraic curves**

[5] S. C. Coutinho, Filipe Ramos Ferreira - **Foliations with one singularity and finite isotropy group**

[6] Percy Fernández, Liliana Puchuri, Rudy Rosas - **Foliations on $\mathbb{P}^2$ with only one singular point**

# Jouanolou: folheações sem curvas algébricas invariantes

Seja $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ e considere a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ dada pela 1-forma:

$$\mathcal{F}_d \colon \Omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

$$v_d = z^d \partial_x + x^d \partial_y + y^d \partial_z$$

**Teorema (Jouanolou)**

[a] *Se $K = \mathbb{C}$ a folheação $\mathcal{F}_d$ não tem curvas algébricas invariantes*

[a] Jouanolou - **Equations de Pfaff algébriques**

O resultado implica, em particular, que em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ **quase toda** folheação não tem curva algébrica invariante. Na prática, construir exemplos concretos de folheações sem soluções algébricas é algo difícil e fonte de diversos trabalhos[1][2][3][4][5][6].

[1] Zoladek - **New examples of holomorphic foliations without algebraic leaves**

[2] J.V. Pereira, P. F. Sanchez - **Automorphisms and non-integrability**

[3] Claudia R. Alcántara - **Foliations on $\mathbb{CP}^2$ of degree $d$ with a singular point with Milnor number $d^2 + d + 1$**

[4] Claudia R. Alcántara, Petra Rubí Pantaleón - **Foliations on $\mathbb{CP}^2$ with a unique singular point without invariant algebraic curves**

[5] S. C. Coutinho, Filipe Ramos Ferreira - **Foliations with one singularity and finite isotropy group**

[6] Percy Fernández, Liliana Puchuri, Rudy Rosas - **Foliations on $\mathbb{P}^2$ with only one singular point**

Parte II: Folheações em característica $p > 0$

# O $p$-divisor em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$ de característica $p > 0$.

## O $p$-divisor em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$ de característica $p > 0$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ de grau $d$ definida por

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e suponha que $p \nmid d + 2$.

# O $p$-divisor em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$ de característica $p > 0$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ de grau $d$ definida por

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e suponha que $p \nmid d + 2$. Escreva $d\omega = (d + 2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy)$ e seja $v_\omega$ o campo de grau $d$ associado a $\mathcal{F}$ dado por

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

# O $p$-divisor em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$ de característica $p > 0$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ de grau $d$ definida por

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e suponha que $p \nmid d + 2$. Escreva $d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy)$ e seja $v_\omega$ o campo de grau $d$ associado a $\mathcal{F}$ dado por

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

O $p$**-divisor** é definido pondo

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{i_{v_\omega^p}\omega = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_K).$$

Note que $\Delta_{\mathcal{F}}$ possui grau $p(d-1) + d + 2$.

# O $p$-divisor em $\mathbb{P}^2_K$

$K = \overline{K}$ de característica $p > 0$.

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$ de grau $d$ definida por

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e suponha que $p \nmid d + 2$. Escreva $d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy)$ e seja $v_\omega$ o campo de grau $d$ associado a $\mathcal{F}$ dado por

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

O $p$-**divisor** é definido pondo

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{i_{v_\omega^p}\omega = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_K).$$

Note que $\Delta_{\mathcal{F}}$ possui grau $p(d-1) + d + 2$.

**Definição**

*A folheação $\mathcal{F}$ é $p$-**fechada** se $\Delta_{\mathcal{F}} = 0$.*

# Exemplo

Seja $\alpha \in K^*$ e considere

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

# Exemplo

Seja $\alpha \in K^*$ e considere

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

$\omega$ define uma folheação de grau 1 em $\mathbb{P}^2_K$. O campo associado é:

$$v = \left(\frac{2\alpha - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha}{3}\right) z\partial_z$$

# Exemplo

Seja $\alpha \in K^*$ e considere

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

$\omega$ define uma folheação de grau 1 em $\mathbb{P}^2_K$. O campo associado é:

$$v = \left(\frac{2\alpha - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha}{3}\right) z\partial_z$$

Por iteração, obtemos

$$v^p = \left(\frac{2\alpha^p - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha^p}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha^p}{3}\right) z\partial_z$$

# Exemplo

Seja $\alpha \in K^*$ e considere

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

$\omega$ define uma folheação de grau 1 em $\mathbb{P}^2_K$. O campo associado é:

$$v = \left(\frac{2\alpha - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha}{3}\right) z\partial_z$$

Por iteração, obtemos

$$v^p = \left(\frac{2\alpha^p - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha^p}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha^p}{3}\right) z\partial_z$$

e o $p$-divisor é:

$$i_{v^p}\omega = yzv^p(x) - \alpha xzv^p(y) + (\alpha - 1)xyv^p(z) = (\alpha^p - \alpha)xyz$$

# Exemplo

Seja $\alpha \in K^*$ e considere

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

$\omega$ define uma folheação de grau 1 em $\mathbb{P}^2_K$. O campo associado é:

$$v = \left(\frac{2\alpha - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha}{3}\right) z\partial_z$$

Por iteração, obtemos

$$v^p = \left(\frac{2\alpha^p - 1}{3}\right) x\partial_x + \left(\frac{2 - \alpha^p}{3}\right) y\partial_y + \left(\frac{-1 - \alpha^p}{3}\right) z\partial_z$$

e o $p$-divisor é:

$$i_{v^p}\omega = yzv^p(x) - \alpha xzv^p(y) + (\alpha - 1)xyv^p(z) = (\alpha^p - \alpha)xyz$$

Se $\alpha \notin \mathbb{F}_p$ :

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{x = 0\} + \{y = 0\} + \{z = 0\}.$$

## O $p$-divisor

Principal propriedade:

## O $p$-divisor

Principal propriedade:

**Proposição**

[a] *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação não $p$-fechada em $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ e $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ uma curva algébrica*

- *Se $C$ é $\mathcal{F}$-invariante então $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$;*

# O $p$-divisor

Principal propriedade:

**Proposição**

[a] *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação não $p$-fechada em $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ e $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ uma curva algébrica*

- *Se $C$ é $\mathcal{F}$-invariante então $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$;*
- *Se $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \mod p$ então $C$ é $\mathcal{F}$-invariante.*

[a] W.Mendson - **Foliations on smooth algebraic surface in positive characteristic**

# O $p$-divisor

Principal propriedade:

**Proposição**

[a] *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação não $p$-fechada em $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ e $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ uma curva algébrica*

- *Se $C$ é $\mathcal{F}$-invariante então $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$;*
- *Se $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \mod p$ então $C$ é $\mathcal{F}$-invariante.*

[a] W.Mendson - **Foliations on smooth algebraic surface in positive characteristic**

**Corolário**

*No plano projetivo sobre característica $p > 0$ qualquer folheação de grau $d$ com $p \nmid d + 2$ possui uma curva algébrica invariante.*

# O $p$-divisor

Principal propriedade:

**Proposição**

[a] *Sejam $\mathcal{F}$ uma folheação não $p$-fechada em $\mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ e $C \subset \mathbb{P}^2_{\mathrm{k}}$ uma curva algébrica*

- *Se $C$ é $\mathcal{F}$-invariante então $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$;*
- *Se $\mathrm{ord}_C(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \mod p$ então $C$ é $\mathcal{F}$-invariante.*

[a] W.Mendson - **Foliations on smooth algebraic surface in positive characteristic**

**Corolário**

*No plano projetivo sobre característica $p > 0$ qualquer folheação de grau $d$ com $p \nmid d + 2$ possui uma curva algébrica invariante.*

**Proposição (J.V.Pereira)**

[a] *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathbb{P}^2_K$ e suponha que $\deg(\mathcal{F}) < p - 1$. Então, $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica invariante.*

[a] J. V. Pereira - **Invariant Hypersurfaces for Positive Characteristic Vector Fields**

## Exemplo

Seja $\mathcal{C}_p$ a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ definida pela 1-forma:

$$\omega = zx^{p-1}dx + zy^{p-1}dy - (x^p + y^p)dz.$$

[7] aqui, usamos a fórmula: $(fD)^p = f^p D^p + fD^{p-1}(f^{p-1})D$

# Exemplo

Seja $\mathcal{C}_p$ a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ definida pela 1-forma:

$$\omega = zx^{p-1}dx + zy^{p-1}dy - (x^p + y^p)dz.$$

O campo associado é:

$$v = y^{p-1}\partial_x - x^{p-1}\partial_y$$

[7] aqui, usamos a fórmula: $(fD)^p = f^p D^p + fD^{p-1}(f^{p-1})D$

# Exemplo

Seja $\mathcal{C}_p$ a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ definida pela 1-forma:

$$\omega = zx^{p-1}dx + zy^{p-1}dy - (x^p + y^p)dz.$$

O campo associado é:

$$v = y^{p-1}\partial_x - x^{p-1}\partial_y$$

Definindo $\tilde{v} = (xy)^p v = y^p x\partial_x - x^p y\partial_y$, temos $\tilde{v}^p = y^{p^2} x\partial_x - x^{p^2} y\partial_y$ e assim[7]:

$$i_{v^p}\omega = \frac{i_{\tilde{v}^p}\omega}{(xy)^p} = \frac{zx^{p-1}\tilde{v}(x) - zy^{p-1}\tilde{v}(y)}{(xy)^p} = \frac{zx^p y^{p^2} - zy^p x^{p^2}}{(xy)^p} = zx^p y^p (y^{p-1} - x^{p-1})^p$$

[7] aqui, usamos a fórmula: $(fD)^p = f^p D^p + fD^{p-1}(f^{p-1})D$

# Exemplo

Seja $\mathcal{C}_p$ a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ definida pela 1-forma:

$$\omega = zx^{p-1}dx + zy^{p-1}dy - (x^p + y^p)dz.$$

O campo associado é:

$$v = y^{p-1}\partial_x - x^{p-1}\partial_y$$

Definindo $\tilde{v} = (xy)^p v = y^p x\partial_x - x^p y\partial_y$, temos $\tilde{v}^p = y^{p^2} x\partial_x - x^{p^2} y\partial_y$ e assim[7]:

$$i_{v^p}\omega = \frac{i_{\tilde{v}^p}\omega}{(xy)^p} = \frac{zx^{p-1}\tilde{v}(x) - zy^{p-1}\tilde{v}(y)}{(xy)^p} = \frac{zx^p y^{p^2} - zy^p x^{p^2}}{(xy)^p} = zx^p y^p(y^{p-1} - x^{p-1})^p$$

O $p$-divisor de $\mathcal{C}_p$ é dado por:

$$\Delta_{\mathcal{C}_p} = \{z = 0\} + p\{y^{p-1} - x^{p-1} = 0\}$$

e assim $\{z = 0\}$ é a **única solução algébrica** de $\mathcal{F}$.

[7] aqui, usamos a fórmula: $(fD)^p = f^p D^p + fD^{p-1}(f^{p-1})D$

# O $p$-divisor

**Corolário**

*No plano projetivo sobre característica $p > 0$ qualquer folheação não p-fechada possui uma curva algébrica invariante de grau menor do que ou igual a $p(d-1)+d+2$.*

# O $p$-divisor

**Corolário**

*No plano projetivo sobre característica $p > 0$ qualquer folheação não p-fechada possui uma curva algébrica invariante de grau menor do que ou igual a $p(d-1) + d + 2$.*

**Problema**

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$.*

- *Qual a estrutura do p-divisor?*
- *$\mathcal{F}$ possui quantas curvas algébricas invariantes?*

# O $p$-divisor

## Corolário

*No plano projetivo sobre característica $p > 0$ qualquer folheação não p-fechada possui uma curva algébrica invariante de grau menor do que ou igual a $p(d-1) + d + 2$.*

## Problema

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_K$.*

- *Qual a estrutura do p-divisor?*
- *$\mathcal{F}$ possui quantas curvas algébricas invariantes?*

## Proposição

[a] *Uma folheação é p-fechada se e somente se ela possui uma infinidade de curvas algébricas invariantes.*

[a] Brunella, Nicolau - **Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff**

# Jouanolou

**Teorema**

[a] *Seja $K$ um corpo algebricamente fechado e de característica $p > 0$. Seja $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que*

- $p < d$ *e* $p \not\equiv 1 \mod 3$;
- $d^2 + d + 1$ *is primo.*

*Então a folheação de Jouanolou, $\mathcal{F}_d$, possui p-divisor irredutível ou*

$$\Delta_{\mathcal{F}_d} = C + pR$$

*com* $\deg(C) = pl + d + 2$, $l > 0$ *e $R$ não $\mathcal{F}_d$-invariante.*

[a] W.Mendson - **Arithmetic aspects of the Jouanolou foliation**

# Jouanolou

**Teorema**

[a] *Seja $K$ um corpo algebricamente fechado e de característica $p > 0$. Seja $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ tal que*

- $p < d$ *e* $p \not\equiv 1 \mod 3$;
- $d^2 + d + 1$ *is primo.*

*Então a folheação de Jouanolou, $\mathcal{F}_d$, possui $p$-divisor irredutível ou*

$$\Delta_{\mathcal{F}_d} = C + pR$$

*com* $\deg(C) = pl + d + 2$, $l > 0$ *e $R$ não $\mathcal{F}_d$-invariante.*

[a] W.Mendson - **Arithmetic aspects of the Jouanolou foliation**

**Consequência:** folheação de Jouanolou $\mathcal{F}_d$ possui única curva algébrica invariante

## característica $p = 5$ e $d \leq 100$

| $d$ | $d^2 + d + 1$ | $\deg(C)$ | $l$ | $R$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 43 | 18 | 2 | $\{xyz = 0\}$ |
| 12 | 157 | 39 | 5 | $\{xyz = 0\}$ |
| 17 | 307 | 54 | 7 | $\{xyz = 0\}$ |
| 21 | 463 | 63 | 8 | $\{xyz = 0\}$ |
| 27 | 757 | 84 | 11 | $\{xyz = 0\}$ |
| 41 | 1723 | 123 | 16 | $\{xyz = 0\}$ |
| 57 | 3307 | 174 | 23 | $\{xyz = 0\}$ |
| 62 | 3907 | 189 | 25 | $\{xyz = 0\}$ |
| 66 | 4423 | 198 | 26 | $\{xyz = 0\}$ |
| 71 | 5113 | 213 | 28 | $\{xyz = 0\}$ |
| 77 | 6007 | 234 | 31 | $\{xyz = 0\}$ |

- para $d \in \{2, 14, 24, 54, 59, 69, 89, 99\}$, $\Delta_{\mathcal{F}_d}$ é irredutível;
- outros casos: $\Delta_{\mathcal{F}_d} = 0$.

## Exemplos curiosos

1. Suponha que $K$ possui característica 3 e considere a folheação de Jouanolou de grau 2 sobre $K$. Então o 3-divisor é irredutível com $\text{sing}(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\subset \text{sing}(\mathcal{F})$.

[8] T. Fassarella, W. Mendson, F. Touzet, J. P. Santos - **Foliations with small singular set in arbitrary characteristic**, trabalho em andamento

## Exemplos curiosos

1. Suponha que $K$ possui característica 3 e considere a folheação de Jouanolou de grau 2 sobre $K$. Então o 3-divisor é irredutível com $\mathrm{sing}(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\subset \mathrm{sing}(\mathcal{F})$.

2. Considere a folheação 5-fechada:

$$\omega = 2z(x+y)dx + z(2z+x)dy + 4(2x^2 + 3xy + 2yz)dz$$

A curva $C = \{-x^4 + x^3y + x^2yz + y^2z^2 = 0\}$ é $\mathcal{F}$-invariante com $[0:0:1] \in \mathrm{sing}(C)$ mas não em $\mathrm{sing}(\mathcal{F})$. [8]

[8] T. Fassarella, W. Mendson, F. Touzet, J. P. Santos - **Foliations with small singular set in arbitrary characteristic**, trabalho em andamento

# Exemplos curiosos

1. Suponha que $K$ possui característica 3 e considere a folheação de Jouanolou de grau 2 sobre $K$. Então o 3-divisor é irredutível com $\mathrm{sing}(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\subset \mathrm{sing}(\mathcal{F})$.

2. Considere a folheação 5-fechada:

$$\omega = 2z(x+y)dx + z(2z+x)dy + 4(2x^2 + 3xy + 2yz)dz$$

   A curva $C = \{-x^4 + x^3y + x^2yz + y^2z^2 = 0\}$ é $\mathcal{F}$-invariante com $[0:0:1] \in \mathrm{sing}(C)$ mas não em $\mathrm{sing}(\mathcal{F})$. [8]

3. Para todo primo $p > 0$, $n > 2$, existem folheações de codimensão um em $\mathbb{P}^n_K$ que não possuem hipersuperfície invariante. De fato, em andamento, um tal exemplo é dado pela seguinte 1-forma:

$$\omega = d\left(\sum_{i=0}^{n-1} x_i x_{i+1}^{2p-1}\right) + x_n^p x_{n-1}^{p-1} dx_{n-1} - x_{n-1}^p x_n^{p-1} dx_n$$

[8] T. Fassarella, W. Mendson, F. Touzet, J. P. Santos - **Foliations with small singular set in arbitrary characteristic**, trabalho em andamento

# Redução módulo $p$

Considere o caso onde $K = \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d$ definida pela 1-forma projetiva:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \qquad A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d+1}$$

# Redução módulo $p$

Considere o caso onde $K = \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d$ definida pela 1-forma projetiva:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \qquad A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d+1}$$

e seja $\mathbb{Z}[\mathcal{F}]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito obtida por junção de todos os coeficientes, e seus inversos, que ocorrem $A, B$ e $C$

# Redução módulo $p$

Considere o caso onde $K = \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d$ definida pela 1-forma projetiva:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \qquad A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d+1}$$

e seja $\mathbb{Z}[\mathcal{F}]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito obtida por junção de todos os coeficientes, e seus inversos, que ocorrem $A, B$ e $C$

**Exemplo**

*Seja $\mathcal{F}$ a folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dada pela 1-forma:*

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

*para algum $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$. Então, a álgebra associada é $\mathbb{Z}[\alpha, \alpha^{-1}]$*

# Redução módulo $p$

Considere o caso onde $K = \mathbb{C}$. Seja $\mathcal{F}$ uma folheação $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau $d$ definida pela 1-forma projetiva:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \qquad A, B, C \in \mathbb{C}[x, y, z]_{d+1}$$

e seja $\mathbb{Z}[\mathcal{F}]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito obtida por junção de todos os coeficientes, e seus inversos, que ocorrem $A, B$ e $C$

**Exemplo**

*Seja $\mathcal{F}$ a folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ dada pela 1-forma:*

$$\omega = yzdx - \alpha xzdy + (\alpha - 1)xydz.$$

*para algum $\alpha \in \mathbb{C} - \mathbb{Q}$. Então, a álgebra associada é $\mathbb{Z}[\alpha, \alpha^{-1}]$*

**Exemplo:** Para a folheação de Jouanolou, $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]$ de modo que $\mathbb{Z}[\mathcal{F}_d] = \mathbb{Z}$.

# Redução módulo $p$

**Fato:** Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$ o corpo residual $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}[\mathcal{F}]/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

# Redução módulo $p$

**Fato:** Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$ o corpo residual $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}[\mathcal{F}]/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Denote por $\omega_{\mathfrak{p}}$ a 1-forma sobre $\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}$ obtida via redução módulo $\mathfrak{p}$ dos coeficientes que aparecem em $A, B$ e $C$. Assim, obtemos um elemento não nulo de $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}}(d+2))$ e $\omega_{\mathfrak{p}}$ determina uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}$ :

$$\omega_{\mathfrak{p}} = Adx + Bdy + Cdz \mod \mathfrak{p}$$

# Redução módulo $p$

**Fato:** Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$ o corpo residual $\mathbb{F}_{\mathfrak{p}} = \mathbb{Z}[\mathcal{F}]/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Denote por $\omega_{\mathfrak{p}}$ a 1-forma sobre $\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}$ obtida via redução módulo $\mathfrak{p}$ dos coeficientes que aparecem em $A, B$ e $C$. Assim, obtemos um elemento não nulo de $\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}}(d+2))$ e $\omega_{\mathfrak{p}}$ determina uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}}$ :

$$\omega_{\mathfrak{p}} = Adx + Bdy + Cdz \mod \mathfrak{p}$$

**Definição**

*A folheação determinada por $\omega_{\mathfrak{p}}$ é denotada por $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ e chamada de a **redução módulo** $p$ **de** $\mathcal{F}$.*

## Redução módulo $p$

Questão natural:

# Redução módulo $p$

Questão natural:

**Problema**

*Suponha que uma propriedade abstrata* $\boldsymbol{P}$ *vale para* $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ *para uma infinidade de primos (ou quase-todos primos)* $\mathfrak{p} \in \boldsymbol{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$*. O que podemos dizer sobre* $\mathcal{F}$*?*

# Redução módulo $p$

Questão natural:

**Problema**

*Suponha que uma propriedade abstrata* $\boldsymbol{P}$ *vale para* $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ *para uma infinidade de primos (ou quase-todos primos)* $\mathfrak{p} \in \boldsymbol{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$*. O que podemos dizer sobre* $\mathcal{F}$*?*

- **infinidade de primos** = primos num subconjunto denso de $\mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$;
- **quase-todos primos** = primos num aberto não vazio de $\mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$.

## Redução módulo $p$

Questão natural:

**Problema**

*Suponha que uma propriedade abstrata* $\boldsymbol{P}$ *vale para* $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ *para uma infinidade de primos (ou quase-todos primos)* $\mathfrak{p} \in \boldsymbol{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$*. O que podemos dizer sobre* $\mathcal{F}$*?*

- **infinidade de primos** = primos num subconjunto denso de $\mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$;
- **quase-todos primos** = primos num aberto não vazio de $\mathbf{Spm}(\mathbb{Z}[\mathcal{F}])$.

Quando $\mathbb{Z}[\mathcal{F}] = \mathbb{Z}$ as noções: **infinidade de primos** e **quase-todos** são as noções usuais.

## Redução módulo $p$

A propriedade **P** pode ser:

- a existência de curvas $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$-invariantes;

## Redução módulo $p$

A propriedade **P** pode ser:

- a existência de curvas $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$-invariantes;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ é $p$-fechada;

# Redução módulo $p$

A propriedade **P** pode ser:

- a existência de curvas $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$-invariantes;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ é $p$-fechada;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ possui $p$-divisor irredutível/reduzido;

# Redução módulo $p$

A propriedade **P** pode ser:

- a existência de curvas $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$-invariantes;
- a folheação $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$ é $p$-fechada;
- a folheação $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$ possui $p$-divisor irredutível/reduzido;

**Proposição**

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $d$ em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e suponha que $\mathcal{F}_\mathfrak{p}$ tem uma curva algébrica invariante de grau menor do que $\boldsymbol{h}$ para quase-todos primos $\mathfrak{p}$. Então, $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica invariante de grau menor do que $\boldsymbol{h}$.*

# Redução módulo $p$

A propriedade **P** pode ser:

- a existência de curvas $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$-invariantes;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ é $p$-fechada;
- a folheação $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ possui $p$-divisor irredutível/reduzido;

**Proposição**

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $d$ em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e suponha que $\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}$ tem uma curva algébrica invariante de grau menor do que $\boldsymbol{h}$ para quase-todos primos $\mathfrak{p}$. Então, $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica invariante de grau menor do que $\boldsymbol{h}$.*

**Ideia:** o conjunto $S(\mathcal{F}, K, d)$ de folheações de grau $d$ em $\mathbb{P}^2_K$ que possuem curvas algébricas de grau $\leq h$ é uma variedade algébrica sobre $K$. Em particular, $S(\mathcal{F}, \mathbb{C}, d) \neq \varnothing$ se e somente se $S(\mathcal{F}, \overline{\mathbb{F}}_{\mathfrak{p}}, d) \neq \varnothing$ para quase-todos primos $\mathfrak{p}$.

# Parte III: Um critério via redução **mod** 2

# Soluções algébricas

**Objetivo:** usar redução módulo $p$ para provar não-algebricidade de folheações holomorfas

[9] Carnicer - **The Poincare problem in the nondicritical case**

# Soluções algébricas

**Objetivo:** usar redução módulo $p$ para provar não-algebricidade de folheações holomorfas

**Proposição**

[a] *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida pela 1-forma $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ com $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]$. Seja $p$ um primo tal que $p > d + 2$. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível então $\mathcal{F}$ não possui soluções algébricas.*

[a] W.Mendson - **Foliations on smooth algebraic surfaces in position characteristic**

[9] Carnicer - **The Poincare problem in the nondicritical case**

# Soluções algébricas

**Objetivo:** usar redução módulo $p$ para provar não-algebricidade de folheações holomorfas

**Proposição**

[a] *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida pela 1-forma $\omega = Adx + Bdy + Cdz$ com $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]$. Seja $p$ um primo tal que $p > d + 2$. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ é irredutível então $\mathcal{F}$ não possui soluções algébricas.*

[a] W.Mendson - **Foliations on smooth algebraic surfaces in position characteristic**

**Ideia:** Suponha que existe uma curva invariante $C = \{F = 0\}$. Podemos assumir $F \in \mathbb{Z}[x, y, z]$. A cota de Carnicer[9] implica que $\deg(C) \leq d + 2$. Reduzindo módulo $p$ e usando a irredutibilidade de $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ chegamos numa contradição.

[9] Carnicer - **The Poincare problem in the nondicritical case**

# Aplicações

**Corolário**

*A folheação de Jouanolou de grau* $2$ *não possui soluções algébricas.*

# Aplicações

**Corolário**

*A folheação de Jouanolou de grau* 2 *não possui soluções algébricas.*

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

**Proposição**

*Se o p-divisor* $\Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}}$ *é irredutível para quase todo primo* $\mathfrak{p}$ *então* $\mathcal{F}$ *não possui soluções algébricas.*

# Aplicações

**Corolário**

*A folheação de Jouanolou de grau 2 não possui soluções algébricas.*

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

**Proposição**

*Se o $p$-divisor $\Delta_{\mathcal{F}_{\mathfrak{p}}}$ é irredutível para quase todo primo $\mathfrak{p}$ então $\mathcal{F}$ não possui soluções algébricas.*

**Ideia:** Suponha que exista uma curva algébrica invariante $C = \{F = 0\}$ de grau $e$. Para primos grandes $p$ obtemos $C \mod p = \Delta_{\mathcal{F}_p}$, uma contradição visto que o grau do $p$-divisor depende de $p$.

# Soluções algébricas via redução **mod** 2

**Teorema**

[a] *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não-dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida pela 1-forma*

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \qquad A, B, C \in K[x, y, z]$$

*onde $K$ é um corpo de números. Se $\Delta_{\mathcal{F}_2}$ é irredutível, então $\mathcal{F}$ não possui soluções algébricas.*

[a] J. P. Figueredo, W. Mendson - **Non-algebraicity of foliations via reduction modulo 2**

[10] W. Mendson - **Arithmetic aspects of the Jouanolou foliation**

# Soluções algébricas via redução **mod** 2

**Teorema**

[a] *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não-dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida pela 1-forma*

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \qquad A, B, C \in K[x, y, z]$$

*onde $K$ é um corpo de números. Se $\Delta_{\mathcal{F}_2}$ é irredutível, então $\mathcal{F}$ não possui soluções algébricas.*

[a] J. P. Figueredo, W. Mendson - **Non-algebraicity of foliations via reduction modulo 2**

**Ideia:** Usar o fato que se $C$ é uma curva algébrica $\mathcal{F}$-invariante então $C \otimes \mathbb{F}_2$ não é um 2-fator.

[10] W. Mendson - **Arithmetic aspects of the Jouanolou foliation**

# Soluções algébricas via redução **mod** 2

**Teorema**

[a] *Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não-dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida pela 1-forma*

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz \qquad A, B, C \in K[x, y, z]$$

*onde $K$ é um corpo de números. Se $\Delta_{\mathcal{F}_2}$ é irredutível, então $\mathcal{F}$ não possui soluções algébricas.*

[a] J. P. Figueredo, W. Mendson - **Non-algebraicity of foliations via reduction modulo 2**

**Ideia:** Usar o fato que se $C$ é uma curva algébrica $\mathcal{F}$-invariante então $C \otimes \mathbb{F}_2$ não é um 2-fator.

**Corolário**

*A folheação de Jouanolou em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ de grau impar não admite curvas algébricas invariantes.*

**Ideia:** Pode-se verificar que a folheação de Jouanolou é não-dicrítica e admite boa redução módulo 2. Em grau ímpar, seu 2-divisor é **irredutível**[10].

[10] W. Mendson - **Arithmetic aspects of the Jouanolou foliation**

# Soluções algébricas via redução **mod** 2

**Observação:** No Teorema anterior, podemos substituir a propriedade de ser não-dicritica pela seguinte propriedade:

[11] $\omega = \omega_l + \cdots + \omega_e$: se $i_R \omega_e = 0$ então a folheação induzida em $\mathbb{P}^2$ tem grau $e - 1$

# Soluções algébricas via redução **mod** 2

**Observação:** No Teorema anterior, podemos substituir a propriedade de ser não-dicritica pela seguinte propriedade:

- **C**: se $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica $D$, então existe uma curva algébrica de grau $e \leq \deg(N_{\mathcal{F}})$

[11] $\omega = \omega_l + \cdots + \omega_e$: se $i_R\omega_e = 0$ então a folheação induzida em $\mathbb{P}^2$ tem grau $e - 1$

# Soluções algébricas via redução **mod** 2

**Observação:** No Teorema anterior, podemos substituir a propriedade de ser não-dicritica pela seguinte propriedade:

- **C**: se $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica $D$, então existe uma curva algébrica de grau $e \leq \deg(N_{\mathcal{F}})$

Considere as seguintes folheações em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:

$$\mathcal{G}_d(u,a,b,c) : \omega = (a + bx + cx^{d-1} + y^{d+1})dx - (u + xy^d)dy$$

$$\mathcal{F}_e(a,b,c) : \omega = (ax^e y - cy^2)dx - (ax^2y^{e-1} + bx)dy$$

com $a, b, c, u \in \mathbb{Z}$ e $uabc \neq 0 \mod 2$. Note que $\mathcal{F}_e(a,b,c)$ tem grau $e+1$ and $\mathcal{G}_d(u,a,b,c)$ tem grau $d$.[11]

[11] $\omega = \omega_l + \cdots + \omega_e$: se $i_R\omega_e = 0$ então a folheação induzida em $\mathbb{P}^2$ tem grau $e-1$

# Soluções algébricas via redução **mod** 2

**Observação:** No Teorema anterior, podemos substituir a propriedade de ser não-dicritica pela seguinte propriedade:

- **C**: se $\mathcal{F}$ possui uma curva algébrica $D$, então existe uma curva algébrica de grau $e \leq \deg(N_{\mathcal{F}})$

Considere as seguintes folheações em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:

$$\mathcal{G}_d(u,a,b,c) : \omega = (a + bx + cx^{d-1} + y^{d+1})dx - (u + xy^d)dy$$

$$\mathcal{F}_e(a,b,c) : \omega = (ax^e y - cy^2)dx - (ax^2 y^{e-1} + bx)dy$$

com $a, b, c, u \in \mathbb{Z}$ e $uabc \neq 0 \mod 2$. Note que $\mathcal{F}_e(a,b,c)$ tem grau $e + 1$ and $\mathcal{G}_d(u,a,b,c)$ tem grau $d$.[11]

**?Teorema?**

*No plano projetivo complexo, $l_\infty = \{z = 0\}$ é a única curva algébrica invariante de $\mathcal{F}_e(a,b,c)$ ($e \geq 6$) e $\mathcal{G}_d(u,a,b,c)$ ($d \geq 5$) não admite curva algébrica invariante.*

[11] $\omega = \omega_l + \cdots + \omega_e$: se $i_R\omega_e = 0$ então a folheação induzida em $\mathbb{P}^2$ tem grau $e - 1$

# Em característica dois

**Teorema**

[a] *Sejam $K$ um corpo de característica dois e $a, b, c, u \in K^*$. Considere a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ de gau $d$ definida em $D_+(z)$ pela 1-forma:*

$$\mathcal{G}_d(u,a,b,c) : \omega = (a + bx + cx^{d-1} + y^{d+1})dx - (u + xy^d)dy$$

*Se $d \geq 5$ é um inteiro ímpar, então o 2-divisor $\Delta_{\mathcal{G}_d(u,a,b,c)}$ é irredutível.*

[a] J. P. Figueredo, W. Mendson - **Non-algebraicity of foliations via reduction modulo 2**

# Em característica dois

**Teorema**

[a] *Sejam $K$ um corpo de característica dois e $a, b, c, u \in K^*$. Considere a folheação em $\mathbb{P}^2_K$ de gau $d$ definida em $D_+(z)$ pela 1-forma:*

$$\mathcal{G}_d(u, a, b, c) : \omega = (a + bx + cx^{d-1} + y^{d+1})dx - (u + xy^d)dy$$

*Se $d \geq 5$ é um inteiro ímpar, então o 2-divisor $\Delta_{\mathcal{G}_d(u,a,b,c)}$ é irredutível.*

[a] J. P. Figueredo, W. Mendson - **Non-algebraicity of foliations via reduction modulo** 2

**Teorema**

[a] *Sejam $K$ um corpo de característica dois e $a, b, c \in K^*$. A folheação de grau $e \geq 6$ em $\mathbb{P}^2_K$ definida por*

$$\mathcal{F}_e(a, b, c) : \omega = (ax^e y - cy^2)dx - (ax^2 y^{e-1} + bx)dy$$

*possui 2-divisor irredutível.*

[a] J. P. Figueredo, W. Mendson - **Non-algebraicity of foliations via reduction modulo** 2

# Folheações com única curva invariante

**Teorema (sobre $\mathbb{C}$)**

[a] *Seja $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ um inteiro impar e defina*

$$f(d) = d^2 + d + 1 \qquad s(d) = d^2 + \frac{d+3}{2} \qquad h(d) = \frac{d^2+d+2}{2} \qquad g(d) = \frac{d+1}{2}.$$

*Seja $\mathcal{F}_d$ a folheação definida pela 1-forma em $D_+(z)$:*

$$\mathcal{F}_d : \omega = (x + ay^{g(d)} + by^{h(d)} + cy^{s(d)})dx - y^{f(d)}dy$$

*onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ são tais que $abc \neq 0 \mod 2$. Então, $l_\infty = \{z = 0\}$ é a única curva algébrica invariante de $\mathcal{F}_d$.*

[a] J. P. Figueredo, W. Mendson - **Non-algebraicity of foliations via reduction modulo 2**

# Folheações com única curva invariante

**Teorema (sobre $\mathbb{C}$)**

[a] *Seja $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ um inteiro impar e defina*

$$f(d) = d^2 + d + 1 \qquad s(d) = d^2 + \frac{d+3}{2} \qquad h(d) = \frac{d^2+d+2}{2} \qquad g(d) = \frac{d+1}{2}.$$

*Seja $\mathcal{F}_d$ a folheação definida pela 1-forma em $D_+(z)$:*

$$\mathcal{F}_d : \omega = (x + ay^{g(d)} + by^{h(d)} + cy^{s(d)})dx - y^{f(d)}dy$$

*onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ são tais que $abc \neq 0 \mod 2$. Então, $l_\infty = \{z = 0\}$ é a única curva algébrica invariante de $\mathcal{F}_d$.*

[a] J. P. Figueredo, W. Mendson - **Non-algebraicity of foliations via reduction modulo 2**

Note que

- $f(d) > s(d) > h(d) > g(d)$;
- $\mathcal{F}_d$ tem grau $f(d)$ e $l_\infty$ é invariante

# Característica 2

## Teorema (sobre $\overline{\mathbb{F}}_2$)

[a] *Seja $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ um inteiro impar e defina*

$$f(d) = d^2 + d + 1 \qquad s(d) = d^2 + \frac{d+3}{2} \qquad h(d) = \frac{d^2+d+2}{2} \qquad g(d) = \frac{d+1}{2}.$$

*Seja $\mathcal{F}_d$ a folheação definida pela 1-forma em $D_+(z)$:*

$$\mathcal{F}_d : \omega = (x + ay^{g(d)} + by^{h(d)} + cy^{s(d)})dx - y^{f(d)}dy$$

*onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ são tais que $abc \neq 0 \mod 2$. Então, $\mathcal{F}$ não é 2-fechada e possui 2-divisor dado por*

$$\Delta_{\mathcal{F}_d} = dl_\infty + (f(d) - 1)\{y = 0\} + C$$

*onde $C$ é uma curva irredutível de grau $2d^2 + d + 3$.*

[a] J. P. Figueredo, W. Mendson - **Non-algebraicity of foliations via reduction modulo 2**

# Característica 2

**Teorema (sobre $\overline{\mathbb{F}}_2$)**

[a] *Seja $d \in \mathbb{Z}_{>1}$ um inteiro impar e defina*

$$f(d) = d^2 + d + 1 \qquad s(d) = d^2 + \frac{d+3}{2} \qquad h(d) = \frac{d^2+d+2}{2} \qquad g(d) = \frac{d+1}{2}.$$

*Seja $\mathcal{F}_d$ a folheação definida pela 1-forma em $D_+(z)$:*

$$\mathcal{F}_d : \omega = (x + ay^{g(d)} + by^{h(d)} + cy^{s(d)})dx - y^{f(d)}dy$$

*onde $a, b, c \in \mathbb{Z}$ são tais que $abc \neq 0 \mod 2$. Então, $\mathcal{F}$ não é 2-fechada e possui 2-divisor dado por*

$$\Delta_{\mathcal{F}_d} = dl_\infty + (f(d) - 1)\{y = 0\} + C$$

*onde $C$ é uma curva irredutível de grau $2d^2 + d + 3$.*

[a] J. P. Figueredo, W. Mendson - **Non-algebraicity of foliations via reduction modulo 2**

**Principal dificuldade:** Mostrar que $C$ é irredutível.

# Exemplos

- $d = 1$: a folhação possui grau 3 e é dada pelo campo:

$$v = y^3\partial_x + (x + ay + by^2 + cy^3)\partial_y$$

O 2-divisor é dado por:

$$\Delta_{\mathcal{F}_1} = \{z = 0\} + 2\{y = 0\} + \{aby^3 + axy + b^2y^4 + by^5 + x^2 + xy^3 + y^4 = 0\}$$

## Exemplos

- $d = 1$: a folhação possui grau 3 e é dada pelo campo:

$$v = y^3\partial_x + (x + ay + by^2 + cy^3)\partial_y$$

  O 2-divisor é dado por:

$$\Delta_{\mathcal{F}_1} = \{z = 0\} + 2\{y = 0\} + \{aby^3 + axy + b^2y^4 + by^5 + x^2 + xy^3 + y^4 = 0\}$$

- $d = 3$: a folheação possui grau 13 e é dada pelo campo:

$$v = y^{13}\partial_x + (x + ay^2 + by^7 + cy^{12})\partial_y$$

  O 2-divisor é:

$$\Delta_{\mathcal{F}_3} = 3\{z = 0\} + 12\{y = 0\} + \{a^2y^4 + aby^9 + bxy^7 + by^{19} + x^2 + y^{24} + y^{14} = 0\}$$

## $\mathbb{F}_2 \Longrightarrow \mathbb{C}$

- **Passo 1:** Suponha, por contradição, que $\mathcal{F}_d$ possui uma curva algébrica $D$ de grau $e$ em $D_+(z)$

[12] Carnicer - **The Poincare problem in the nondicritical case**

## $\mathbb{F}_2 \Longrightarrow \mathbb{C}$

- **Passo 1:** Suponha, por contradição, que $\mathcal{F}_d$ possui uma curva algébrica $D$ de grau $e$ em $D_+(z)$

- **Passo 2:** Sem perda de generalidade podemos supor que $D$ está definida sobre $\mathbb{Z}$. A cota de Carnicer[12] implica que $e \leq d + 2$ ($\mathcal{F}_d$ é não-dicrítica)

[12] Carnicer - **The Poincare problem in the nondicritical case**

# $\mathbb{F}_2 \Longrightarrow \mathbb{C}$

- **Passo 1:** Suponha, por contradição, que $\mathcal{F}_d$ possui uma curva algébrica $D$ de grau $e$ em $D_+(z)$
- **Passo 2:** Sem perda de generalidade podemos supor que $D$ está definida sobre $\mathbb{Z}$. A cota de Carnicer[12] implica que $e \leq d + 2$ ($\mathcal{F}_d$ é não-dicrítica)
- **Passo 3:** Como $C \otimes \mathbb{F}_2$ não é um 2-fator, segue que existe um fator irredutível $Q$ de $C \otimes \mathbb{F}_2$ tal que $Q$ define uma curva invariante de $\mathcal{F}_2 := \mathcal{F} \otimes \mathbb{F}_2$

[12] Carnicer - **The Poincare problem in the nondicritical case**

## $\mathbb{F}_2 \Longrightarrow \mathbb{C}$

- **Passo 1:** Suponha, por contradição, que $\mathcal{F}_d$ possui uma curva algébrica $D$ de grau $e$ em $D_+(z)$
- **Passo 2:** Sem perda de generalidade podemos supor que $D$ está definida sobre $\mathbb{Z}$. A cota de Carnicer[12] implica que $e \leq d+2$ ($\mathcal{F}_d$ é não-dicrítica)
- **Passo 3:** Como $C \otimes \mathbb{F}_2$ não é um 2-fator, segue que existe um fator irredutível $Q$ de $C \otimes \mathbb{F}_2$ tal que $Q$ define uma curva invariante de $\mathcal{F}_2 := \mathcal{F} \otimes \mathbb{F}_2$
- **Passo 4:** Pela estrutura do 2-divisor segue que

$$\Delta_{\mathcal{F}_2} = (f(d) - 1)\{y = 0\} + D$$

e daí resulta que $Q = D$, pois $\{y = 0\}$ não é $\mathcal{F}_2$-invariante

[12] Carnicer - **The Poincare problem in the nondicritical case**

## $\mathbb{F}_2 \Longrightarrow \mathbb{C}$

- **Passo 1:** Suponha, por contradição, que $\mathcal{F}_d$ possui uma curva algébrica $D$ de grau $e$ em $D_+(z)$
- **Passo 2:** Sem perda de generalidade podemos supor que $D$ está definida sobre $\mathbb{Z}$. A cota de Carnicer[12] implica que $e \leq d+2$ ($\mathcal{F}_d$ é não-dicrítica)
- **Passo 3:** Como $C \otimes \mathbb{F}_2$ não é um 2-fator, segue que existe um fator irredutível $Q$ de $C \otimes \mathbb{F}_2$ tal que $Q$ define uma curva invariante de $\mathcal{F}_2 := \mathcal{F} \otimes \mathbb{F}_2$
- **Passo 4:** Pela estrutura do 2-divisor segue que
$$\Delta_{\mathcal{F}_2} = (f(d)-1)\{y=0\} + D$$
e daí resulta que $Q = D$, pois $\{y=0\}$ não é $\mathcal{F}_2$-invariante
- **Passo 5:** Daí, resulta:
$$d+2 \geq \deg(C) \geq \deg(Q) = 2d^2 + d + 3$$
e daí $2d^2 \leq -1$, uma contradição.

[12] Carnicer - **The Poincare problem in the nondicritical case**

# Como checar a irredutibilidade

Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\bar{i}} a_{\bar{i}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Podemos ver $(i_1, \ldots, i_n)$ como um elemento de $\mathbb{R}^n$. O politopo de Newton de $f$, denotado por $P_f \subset \mathbb{R}^n$, é o fecho convexo do conjunto dos exponentes $(i_1, \ldots, i_n)$ que ocorrem em $f$.

# Como checar a irredutibilidade

Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\bar{i}} a_{\bar{i}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Podemos ver $(i_1, \ldots, i_n)$ como um elemento de $\mathbb{R}^n$. O politopo de Newton de $f$, denotado por $P_f \subset \mathbb{R}^n$, é o fecho convexo do conjunto dos exponentes $(i_1, \ldots, i_n)$ que ocorrem em $f$.

**Proposição**

[a] *Se $f = hg$ com $g$ e $h$ não constantes então $P_f = P_h + P_g$ (soma de Minkowski).*

[a] Shuhong Gao - **Absolute irreducibility of polynomials via Newton polytopes**

# Como checar a irredutibilidade

Seja $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\bar{i}} a_{\bar{i}} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n} \in K[x_1, \ldots, x_n]$. Podemos ver $(i_1, \ldots, i_n)$ como um elemento de $\mathbb{R}^n$. O politopo de Newton de $f$, denotado por $P_f \subset \mathbb{R}^n$, é o fecho convexo do conjunto dos exponentes $(i_1, \ldots, i_n)$ que ocorrem em $f$.

## Proposição

[a] *Se $f = hg$ com $g$ e $h$ não constantes então $P_f = P_h + P_g$ (soma de Minkowski).*

[a] Shuhong Gao - **Absolute irreducibility of polynomials via Newton polytopes**

## Observação

[a] *Seja $P$ um polígono em $\mathbb{R}^2$. Seja $v(P) = \{\overrightarrow{p_1p_2}, \overrightarrow{p_2p_3}, \ldots, \overrightarrow{p_np_1}\}$ onde $\partial P = \{p_1, \ldots, p_n\}$. Se $v(P)$ não pode ser particionado em duas subsequências disjuntas, com cada uma somando zero, então $P$ não pode ser escrito como soma de Minkowski de dois polígonos menores.*

[a] David E Speyer - **(https://mathoverflow.net/users/297/david-e-speyer), Irreducibility of polynomials in two variables**

# Exemplo

Considere o polinômio:

$$f(x,y) = ay^2 + by + cxy + d + ex + fx^2 + gx^3 \in K[x,y]$$

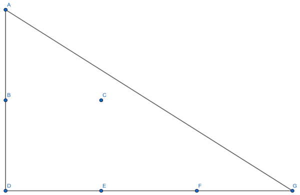
com $adg \neq 0$. O polígono de Newton de $f$ é:

# Exemplo

Considere o polinômio:

$$f(x,y) = ay^2 + by + cxy + d + ex + fx^2 + gx^3 \in K[x,y]$$

com $adg \neq 0$. O polígono de Newton de $f$ é:

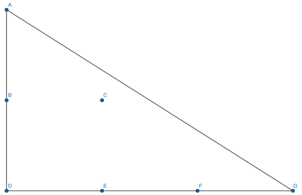


# Exemplo

Considere o polinômio:

$$f(x,y) = ay^2 + by + cxy + d + ex + fx^2 + gx^3 \in K[x,y]$$

com $adg \neq 0$. O polígono de Newton de $f$ é:




Note que

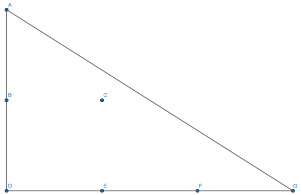
$$v(P) = \{(0,-1),(0,-1),(1,0),(1,0),(1,0),(-3,2)\}.$$

# Exemplo

Considere o polinômio:

$$f(x,y) = ay^2 + by + cxy + d + ex + fx^2 + gx^3 \in K[x,y]$$

com $adg \neq 0$. O polígono de Newton de $f$ é:




Note que

$$v(P) = \{(0,-1),(0,-1),(1,0),(1,0),(1,0),(-3,2)\}.$$

Como $v(P)$ não pode ser particionado em duas subsequências disjuntas somando zero, segue que $f$ é irredutível.

# Alguns problemas

## Problemas

- *Precisamos da condição não-dicrítica no critério de redução* $\textbf{mod } 2$*?*

# Alguns problemas

## Problemas

- *Precisamos da condição não-dicrítica no critério de redução* $\textbf{mod } 2$*?*
- *Entender a "correspondência": folheações em* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *sem curva algébrica invariante se "correspondem" no conjunto de folheações* $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ *com única curva algébrica invariante*

# Alguns problemas

## Problemas

- *Precisamos da condição não-dicrítica no critério de redução* $\textbf{mod } 2$*?*
- *Entender a "correspondência": folheações em* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *sem curva algébrica invariante se "correspondem" no conjunto de folheações* $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ *com única curva algébrica invariante*
- *Seja* $\mathcal{F}$ *uma folheação em* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *definida sobre* $\mathbb{Z}$ *e suponha que* $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ *é irredutível para algum primo* $p$*. Existe um conjunto denso* $S \subset \boldsymbol{Spm}(\mathbb{Z})$ *tal que* $\Delta_{\mathcal{F}_q}$ *é irredutível para todo primo em* $S$*?*

# Alguns problemas

## Problemas

- *Precisamos da condição não-dicrítica no critério de redução* $\textbf{\textit{mod}}\ 2$*?*
- *Entender a "correspondência": folheações em* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *sem curva algébrica invariante se "correspondem" no conjunto de folheações* $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ *com única curva algébrica invariante*
- *Seja* $\mathcal{F}$ *uma folheação em* $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ *definida sobre* $\mathbb{Z}$ *e suponha que* $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ *é irredutível para algum primo* $p$*. Existe um conjunto denso* $S \subset \textbf{\textit{Spm}}(\mathbb{Z})$ *tal que* $\Delta_{\mathcal{F}_q}$ *é irredutível para todo primo em* $S$*?*
- *Entender o p-divisor para folheações que admitem única singularidade.*

Obrigado ;-)