Folheações de codimensão um em característica positiva

Wodson Mendson

Grupo de Seminários de Folheações(Online)

27 de maio de 2022

- O conteúdo da exposição se corresponde ao conteúdo da minha tese de doutorado realizada no IMPA sob a supervisão do Jorge Vitório Pereira[1].

[1] **Folheações de codimensão um em característica positiva e aplicações**, disponível em wodson.org

Folheações em variedades algébricas

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}$,$\overline{\mathbb{F}}_p$)

Folheações em variedades algébricas

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}$,$\overline{\mathbb{F}}_p$)

Definição

Seja X uma variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k. *Uma* ***folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um*** *em X consiste em um subfeixe coerente $T_{\mathcal{F}} \subset T_X$ de posto $\dim X - 1$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

Folheações em variedades algébricas

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}}_p$)

Definição

Seja X uma variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k. *Uma* ***folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um*** *em X consiste em um subfeixe coerente $T_{\mathcal{F}} \subset T_X$ de posto* $\dim X - 1$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *$T_{\mathcal{F}}$ é fechado por colchete de Lie,*

Folheações em variedades algébricas

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}$,$\overline{\mathbb{F}}_p$)

Definição

Seja X uma variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k*. Uma* ***folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um*** *em X consiste em um subfeixe coerente $T_{\mathcal{F}} \subset T_X$ de posto* $\dim X - 1$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *$T_{\mathcal{F}}$ é fechado por colchete de Lie,*
- *O quociente $T_X/T_{\mathcal{F}}$ é livre de torção, isto é, $T_{\mathcal{F}}$ é saturado em T_X.*

Folheações em variedades algébricas

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}}_p$)

Definição

Seja X uma variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k. *Uma* ***folheação $\mathcal{F}$ de codimensão um*** *em X consiste em um subfeixe coerente $T_{\mathcal{F}} \subset T_X$ de posto* $\dim X - 1$ *satisfazendo as seguintes propriedades:*

- *$T_{\mathcal{F}}$ é fechado por colchete de Lie,*
- *O quociente $T_X/T_{\mathcal{F}}$ é livre de torção, isto é, $T_{\mathcal{F}}$ é saturado em T_X.*

O conjunto singular de $\mathcal{F}$ é definido pondo

$$\mathrm{sing}(\mathcal{F}) = \{x \in X \mid (T_X/T_{\mathcal{F}})_x \text{ não é um } \mathcal{O}_{X,x}\text{-módulo livre}\}.$$

Folheações em variedades algébricas

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em X.

- **Feixe normal** de $\mathcal{F}$:
$$N_{\mathcal{F}} = (T_X/T_{\mathcal{F}})^{**}$$
- **Feixe conormal** de $\mathcal{F}$:
$$\Omega^1_{X/\mathcal{F}} = \{\omega \in \Omega^1_{X/\,\mathrm{k}} \mid i_v\omega = 0 \quad \forall v \in T_{\mathcal{F}}\} \cong N^*_{\mathcal{F}}$$

Folheações em variedades algébricas

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em X.

- **Feixe normal** de $\mathcal{F}$:

$$N_{\mathcal{F}} = (T_X/T_{\mathcal{F}})^{**}$$

- **Feixe conormal** de $\mathcal{F}$:

$$\Omega^1_{X/\mathcal{F}} = \{\omega \in \Omega^1_{X/\,\mathrm{k}} \mid i_v\omega = 0 \quad \forall v \in T_{\mathcal{F}}\} \cong N^*_{\mathcal{F}}$$

A inclusão de $N^*_{\mathcal{F}}$ em $\Omega^1_{X/\,\mathrm{k}}$ determina uma seção global não nula $\omega \in \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_{X/\,\mathrm{k}} \otimes N_{\mathcal{F}})$ com zeros de codimensão pelo menos dois. Como $T_{\mathcal{F}}$ é estável por colchete de Lie temos que $\omega \wedge d\omega = 0$.

Folheações em variedades algébricas

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em X.

- **Feixe normal** de $\mathcal{F}$:
$$N_{\mathcal{F}} = (T_X/T_{\mathcal{F}})^{**}$$
- **Feixe conormal** de $\mathcal{F}$:
$$\Omega^1_{X/\mathcal{F}} = \{\omega \in \Omega^1_{X/\mathrm{k}} \mid i_v\omega = 0 \quad \forall v \in T_{\mathcal{F}}\} \cong N^*_{\mathcal{F}}$$

A inclusão de $N^*_{\mathcal{F}}$ em $\Omega^1_{X/\mathrm{k}}$ determina uma seção global não nula $\omega \in \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_{X/\mathrm{k}} \otimes N_{\mathcal{F}})$ com zeros de codimensão pelo menos dois. Como $T_{\mathcal{F}}$ é estável por colchete de Lie temos que $\omega \wedge d\omega = 0$. Reciprocamente, se ω é uma seção global de $\Omega^1_{X/\mathrm{k}} \otimes \mathcal{I}$ para algum feixe invertível $\mathcal{I}$, com zeros de codimensão pelo menos dois e integrável então obtemos um subfeixe saturado de T_X e fechado por colchete de Lie considerando o núcleo do mapa contração por ω

$$\gamma_\omega : T_X \longrightarrow \mathcal{I}$$

Folheações em variedades algébricas: definição II

Definição

Seja $\mathcal{I}$ um feixe invertível em X. Uma folheação de codimensão um em X com feixe normal $\mathcal{I}$ é determinada por uma seção global não nula $\omega \in \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_{X/\,\mathrm{k}} \otimes \mathcal{I})$ satisfazendo as seguintes condições

- $\omega \wedge d\omega = 0$,
- $\operatorname{codim} \operatorname{sing}(\omega) \geq 2$.

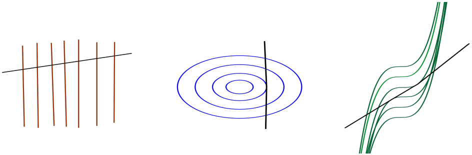
Folheações em variedades algébricas: definição II

Definição

Seja $\mathcal{I}$ um feixe invertível em X. Uma folheação de codimensão um em X com feixe normal $\mathcal{I}$ é determinada por uma seção global não nula $\omega \in \mathrm{H}^0(X, \Omega^1_{X/\mathrm{k}} \otimes \mathcal{I})$ satisfazendo as seguintes condições

- $\omega \wedge d\omega = 0$,
- $\operatorname{codim} \operatorname{sing}(\omega) \geq 2$.

Quando $X = \mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ as folheações de codimensão um em X admitem uma representação bem explícita. Dada uma tal folheação podemos associar **grau**.



Folheações de codimensão um em espaços projetivos

Usando a sequência exata de Euler para espaços projetivos

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}}(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}} \longrightarrow 0$$

percebe-se que uma folheação de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ é determinada por uma 1-forma homogênea em $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}$

$$\sigma = A_0 dx_0 + \cdots + A_n dx_n$$

Folheações de codimensão um em espaços projetivos

Usando a sequência exata de Euler para espaços projetivos

$$0 \longrightarrow \Omega^1_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}}(-1)^{n+1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}} \longrightarrow 0$$

percebe-se que uma folheação de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ é determinada por uma 1-forma homogênea em $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}$

$$\sigma = A_0 dx_0 + \cdots + A_n dx_n$$

onde $A_0 \ldots, A_n \in \mathrm{k}[x_0, \ldots, x_n]$ são polinômios homogêneos de grau $d+1$ e tal que $\mathrm{sing}(\sigma) = \mathcal{Z}(A_0 \ldots, A_n)$ tem codimensão maior que um e com σ satisfazendo as seguintes condições

$$i_R\sigma = \sum_i A_i x_i = 0 \qquad \sigma \wedge d\sigma = 0.$$

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de caracterísica $p > 0$.

R = k-domínio (exemplo: $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n], \mathrm{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$)

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de caracterísica $p > 0$.

R = k-domínio (exemplo: $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n], \mathrm{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$)

Sejam v, v_1 e v_2 k-derivações de R. Então valem as seguintes propriedades

- O p-iterado de v , v^p, é uma k-derivação,

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de caracterísica $p > 0$.

R = k-domínio (exemplo: $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n], \mathrm{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$)

Sejam v, v_1 e v_2 k-derivações de R. Então valem as seguintes propriedades

- O p-iterado de v , v^p, é uma k-derivação,
- Se v_1, v_2 são k-derivações de R então

$$(v_1 + v_2)^p = v_1^p + v_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(v_1, v_2)$$

com $s_i(v_1, v_2)$ na álgebra de Lie gerada por v_1, v_2,

Folheações de codimensão um em característica positiva

k = corpo algebricamente fechado de caracterísica $p > 0$.

R = k-domínio (exemplo: $R = \mathrm{k}[x_1, ..., x_n], \mathrm{k}[[x_1, \ldots, x_n]]$)

Sejam v, v_1 e v_2 k-derivações de R. Então valem as seguintes propriedades

- O p-iterado de v , v^p, é uma k-derivação,
- Se v_1, v_2 são k-derivações de R então

$$(v_1 + v_2)^p = v_1^p + v_2^p + \sum_{i=1}^{p-1} s_i(v_1, v_2)$$

  com $s_i(v_1, v_2)$ na álgebra de Lie gerada por v_1, v_2,
- Para qualquer $f \in R$ temos

$$(fv)^p = f^p v^p - f v^{p-1}(f) v.$$

Folheações p-fechadas

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma variedade algébrica não singular X definida sobre k*. Dizemos que $\mathcal{F}$ é p-**fechada** se $T_{\mathcal{F}}$ é estável por p-potências.*

[2] **Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff**

Folheações p-fechadas

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma variedade algébrica não singular X definida sobre k*. Dizemos que $\mathcal{F}$ é p-**fechada** se $T_{\mathcal{F}}$ é estável por p-potências.*

As folheações p-fechadas são a versão em característica positiva das folheações holomorfas que admitem uma integral primeira meromorfa. Vale em particular o seguinte teorema.[2]

[2] **Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff**

Folheações p-fechadas

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em uma variedade algébrica não singular X definida sobre k. *Dizemos que $\mathcal{F}$ é **p-fechada** se $T_{\mathcal{F}}$ é estável por p-potências.*

As folheações p-fechadas são a versão em característica positiva das folheações holomorfas que admitem uma integral primeira meromorfa. Vale em particular o seguinte teorema.[2]

Teorema (Brunella-Nicolau)

Seja X uma variedade projetiva não singular definida sobre k *e $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um. Então, $\mathcal{F}$ é p-fechada se e só se existe uma infinidade de hipersuperfícies $\mathcal{F}$-invariantes.*

[2] **Sur les hypersurfaces solutions des équations de Pfaff**

Por outro lado, cuidado![3]

[3] **Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields**

Por outro lado, cuidado![3]

Proposição (J.V.Pereira)

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_k$ e suponha que $\deg(\mathcal{F}) < p - 1$. Então, $\mathcal{F}$ admite uma curva algébrica invariante.

[3] **Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields**

Por outro lado, cuidado![3]

Proposição (J.V.Pereira)

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_k$ e suponha que $\deg(\mathcal{F}) < p-1$. Então, $\mathcal{F}$ admite uma curva algébrica invariante.

Exemplo

Sejam k um corpo algebricamente fechado de característica $p > 0$ e $\mathcal{F}$ a folheação em $\mathbb{A}^2_k$ definida pela a 1-forma

$$\omega = ydx - \alpha xdy$$

para algum $\alpha \in k^*$. Então, $\mathcal{F}$ é p-fechada se e somente se $\alpha \in \mathbb{F}_p$.

Note inicialmente que um campo v é tangente a $\mathcal{F}$ se e somente se $v = g \cdot v_1$ para algum polinômio $g \in k[x, y]$ onde $v_1 = \alpha x\partial_x + y\partial_y$. Agora, note que v_1 é tangente a folheação definida por ω e que $v_1^p = \alpha^p x\partial_x + y\partial_y$.

[3] **Invariant hypersurfaces for positive characteristic vector fields**

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de caracterísitca $p > 0$
- R = k-domínio local regular que é localização de um k-domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- $t_1, \ldots, t_r$ = um sistema de parâmetros de R.

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de caracterísitca $p > 0$
- R = k-domínio local regular que é localização de um k-domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- $t_1, \ldots, t_r$ = um sistema de parâmetros de R.

Do sistema de parâmetos obtemos $\{dt_1, \ldots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega^1_{R/\,\mathrm{k}}$. Temos ainda que R é um R^p-módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$ para todo i.

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de caracterísitca $p > 0$
- R = k-domínio local regular que é localização de um k-domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- $t_1, \ldots, t_r$ = um sistema de parâmetros de R.

Do sistema de parâmetos obtemos $\{dt_1, \ldots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega^1_{R/\mathrm{k}}$. Temos ainda que R é um R^p-módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p - 1$ para todo i.

- **1-formas fechadas:**

$$Z^1_{R/\mathrm{k}} = \{\omega \in \Omega^1_{R/\mathrm{k}} \mid d\omega = 0\}$$

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de caracterísitca $p > 0$
- R = k-domínio local regular que é localização de um k-domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- $t_1, \ldots, t_r$ = um sistema de parâmetros de R.

Do sistema de parâmetos obtemos $\{dt_1, \ldots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega^1_{R/\,\mathrm{k}}$. Temos ainda que R é um R^p-módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$ para todo i.

- **1-formas fechadas:**

$$Z^1_{R/\,\mathrm{k}} = \{\omega \in \Omega^1_{R/\,\mathrm{k}} \mid d\omega = 0\}$$

- **1-formas exatas:**

$$B^1_{R/\,\mathrm{k}} = \{\omega \in \Omega^1_{R/\,\mathrm{k}} \mid \omega = dg\}$$

Operador de Cartier

- k = corpo algebricamente fechado de caracterísitca $p > 0$
- R = k-domínio local regular que é localização de um k-domínio de tipo finito (exemplo: $\mathcal{O}_{X,x}$)
- $t_1, \dots, t_r$ = um sistema de parâmetros de R.

Do sistema de parâmetos obtemos $\{dt_1, \dots, dt_r\}$ uma base para o módulo $\Omega^1_{R/\mathrm{k}}$. Temos ainda que R é um R^p-módulo livre com base formada por todos os monômios da forma $t_1^{a_1} \cdots t_r^{a_r}$ com $0 \leq a_i \leq p-1$ para todo i.

- **1-formas fechadas:**

$$Z^1_{R/\mathrm{k}} = \{\omega \in \Omega^1_{R/\mathrm{k}} \mid d\omega = 0\}$$

- **1-formas exatas:**

$$B^1_{R/\mathrm{k}} = \{\omega \in \Omega^1_{R/\mathrm{k}} \mid \omega = dg\}$$

- **Obstrução:**

$$H^1_{R/\mathrm{k}} = Z^1_{R/\mathrm{k}} / B^1_{R/\mathrm{k}}$$

Operador de Cartier

Considere o R^p-módulo

$$M(t_1, \dots, t_r) = R^p t_1^{p-1} dt_1 \oplus \cdots \oplus R^p t_r^{p-1} dt_r$$

Proposição

Todo elemento de $Z^1_{R/\,k}$ se escreve de modo único como $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ com $\sigma_1 \in B^1_{R/\,k}$ e $\sigma_2 \in M(t_1, \dots, t_r)$.

Operador de Cartier

Considere o R^p-módulo

$$M(t_1, \ldots, t_r) = R^p t_1^{p-1} dt_1 \oplus \cdots \oplus R^p t_r^{p-1} dt_r$$

Proposição

Todo elemento de $Z^1_{R/\,\mathrm{k}}$ se escreve de modo único como $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ com $\sigma_1 \in B^1_{R/\,\mathrm{k}}$ e $\sigma_2 \in M(t_1, \ldots, t_r)$.

O **Operador de Cartier** é o mapa

$$\mathbf{C} \colon Z^1_{R/\,\mathrm{k}} \longrightarrow \Omega^1_{R/\,\mathrm{k}}$$
$$dg + \sum_{i=1}^{r} u_i^p t_i^{p-1} dt_i \mapsto \sum_{i=1}^{r} u_i dt_i$$

Fórmula fundamental

O **Operador de Cartier** pode ser definido de maneira mais explícita considerando inversa do isomorfismo[4]

$$\begin{aligned} \gamma\colon \Omega^1_{R/\mathrm{k}} \longrightarrow Z^1_{R/\mathrm{k}} \longrightarrow H^1_{R/\mathrm{k}} \\ adt \mapsto a^p t^{p-1} dt \mapsto [a^p t^{p-1} dt]. \end{aligned}$$

[4] 1.3.4 Theorem em **Frobenius splitting methods in geometry and representation theory**

Fórmula fundamental

O **Operador de Cartier** pode ser definido de maneira mais explícita considerando inversa do isomorfismo[4]

$$\begin{aligned}\gamma\colon \Omega^1_{R/\,\mathrm{k}} &\longrightarrow Z^1_{R/\,\mathrm{k}} \longrightarrow H^1_{R/\,\mathrm{k}}\\ adt &\mapsto a^p t^{p-1} dt \mapsto [a^p t^{p-1} dt].\end{aligned}$$

Teorema

Seja $\omega \in \Omega^1_{R/\,\mathrm{k}}$ uma 1-forma fechada e $v \in \mathrm{Der}_{\mathrm{k}}(R)$ uma derivação. Então,

$$i_v\, \boldsymbol{C}(\omega)^p = i_{v^p}\omega - v^{p-1}(i_v\omega).$$

[4] 1.3.4 Theorem em **Frobenius splitting methods in geometry and representation theory**

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre* k *e denote por* $\mathcal{Z}^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *o subfeixe de* $\Omega^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *formado pelas* 1*-formas fechadas. Existe um operador, chamado o* ***Operador de Cartier***, $\boldsymbol{C} : \mathcal{Z}^1_{X/\,\mathrm{k}} \longrightarrow \Omega^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre* k *e denote por* $\mathcal{Z}^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *o subfeixe de* $\Omega^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *formado pelas* 1*-formas fechadas. Existe um operador, chamado o* ***Operador de Cartier****,* $\boldsymbol{C}: \mathcal{Z}^1_{X/\,\mathrm{k}} \longrightarrow \Omega^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

1. $\boldsymbol{C}(\sigma_1 + \sigma_2) = \boldsymbol{C}(\sigma_1) + \boldsymbol{C}(\sigma_2)$,

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre* k *e denote por* $\mathcal{Z}^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *o subfeixe de* $\Omega^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *formado pelas* 1*-formas fechadas. Existe um operador, chamado o **Operador de Cartier**,* $\boldsymbol{C} : \mathcal{Z}^1_{X/\,\mathrm{k}} \longrightarrow \Omega^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

1. $\boldsymbol{C}(\sigma_1 + \sigma_2) = \boldsymbol{C}(\sigma_1) + \boldsymbol{C}(\sigma_2)$,
2. $\boldsymbol{C}(f^p \sigma_1) = f\, \boldsymbol{C}(\sigma_1)$,

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre* k *e denote por* $\mathcal{Z}^1_{X/\,k}$ *o subfeixe de* $\Omega^1_{X/\,k}$ *formado pelas* 1*-formas fechadas. Existe um operador, chamado o* ***Operador de Cartier***, $\boldsymbol{C} : \mathcal{Z}^1_{X/\,k} \longrightarrow \Omega^1_{X/\,k}$ *unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

1. $\boldsymbol{C}(\sigma_1 + \sigma_2) = \boldsymbol{C}(\sigma_1) + \boldsymbol{C}(\sigma_2)$,
2. $\boldsymbol{C}(f^p \sigma_1) = f\,\boldsymbol{C}(\sigma_1)$,
3. $\boldsymbol{C}(df) = 0$,

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre* k *e denote por* $\mathcal{Z}^1_{X/\mathrm{k}}$ *o subfeixe de* $\Omega^1_{X/\mathrm{k}}$ *formado pelas* 1*-formas fechadas. Existe um operador, chamado o* ***Operador de Cartier***, $\boldsymbol{C} : \mathcal{Z}^1_{X/\mathrm{k}} \longrightarrow \Omega^1_{X/\mathrm{k}}$ *unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

1. $\boldsymbol{C}(\sigma_1 + \sigma_2) = \boldsymbol{C}(\sigma_1) + \boldsymbol{C}(\sigma_2)$,
2. $\boldsymbol{C}(f^p \sigma_1) = f\, \boldsymbol{C}(\sigma_1)$,
3. $\boldsymbol{C}(df) = 0$,
4. $\boldsymbol{C}(f^{p-1} df) = df$,

Algumas propriedades

Proposição

[a] *Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre* k *e denote por* $\mathcal{Z}^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *o subfeixe de* $\Omega^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *formado pelas 1-formas fechadas. Existe um operador, chamado o* ***Operador de Cartier****,* $\boldsymbol{C} : \mathcal{Z}^1_{X/\,\mathrm{k}} \longrightarrow \Omega^1_{X/\,\mathrm{k}}$ *unicamente determinado pelas seguintes propriedades:*

1. $\boldsymbol{C}(\sigma_1 + \sigma_2) = \boldsymbol{C}(\sigma_1) + \boldsymbol{C}(\sigma_2)$,
2. $\boldsymbol{C}(f^p \sigma_1) = f\, \boldsymbol{C}(\sigma_1)$,
3. $\boldsymbol{C}(df) = 0$,
4. $\boldsymbol{C}(f^{p-1} df) = df$,
5. $\boldsymbol{C}(\frac{df}{f}) = \frac{df}{f}$

para quaisquer seções locais $f \in \mathcal{O}_X$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{Z}^1_{X/\,\mathrm{k}}$.

[a] **Seshadri, L'opération de Cartier**

Folheações não p-fechadas e a p-distribuição associada

- X = variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k
- $\mathcal{F}$ = folheação de codimensão um não p-fechada em X

Folheações não p-fechadas e a p-distribuição associada

- X = variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k
- $\mathcal{F}$ = folheação de codimensão um não p-fechada em X

Teorema (D. Cerveau, A. Lins Neto, F. Loray, J.V. Pereira, F. Touzet)

Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre k *e ω uma 1-forma racional. Suponha que ω é integrável e que v é um campo racional tal que $i_v\omega = 0$. Se $f = i_{v_p}\omega \neq 0$ então $d(f^{p-1}\omega) = 0$.*[a]

[a] **Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences**

Folheações não p-fechadas e a p-distribuição associada

- X = variedade algébrica não singular de dimensão pelo menos dois definida sobre k
- $\mathcal{F}$ = folheação de codimensão um não p-fechada em X

Teorema (D. Cerveau, A. Lins Neto, F. Loray, J.V. Pereira, F. Touzet)

Seja X uma variedade algébrica não singular definida sobre k *e ω uma 1-forma racional. Suponha que ω é integrável e que v é um campo racional tal que $i_v\omega = 0$. Se $f = i_{v_p}\omega \neq 0$ então $d(f^{p-1}\omega) = 0$.*[a]

[a] **Complex codimension one singular foliations and Godbillon-Vey sequences**

Seja ω uma 1-forma fechada definindo $\mathcal{F}$. Considere o subfeixe $T_{\mathcal{C}_\mathcal{F}}$ de $T_\mathcal{F}$ definido pondo

$$\boxed{T_{\mathcal{C}_\mathcal{F}} = \{v \in T_\mathcal{F} \mid i_v\, \mathbf{C}(\omega) = 0\}} \qquad (1)$$

onde $\mathbf{C}$ é o Operador de Cartier.

Morfismo p-curvatura

$$\boxed{T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} = \{v \in T_{\mathcal{F}} \mid i_v\, \mathbf{C}(\omega) = 0\}} \tag{2}$$

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo $\mathcal{F}$ e é um subfeixe saturado em T_X.

Morfismo p-curvatura

$$\boxed{T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} = \{v \in T_{\mathcal{F}} \mid i_v\, \mathbf{C}(\omega) = 0\}} \tag{2}$$

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo $\mathcal{F}$ e é um subfeixe saturado em T_X.

Definição

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um não p-fechada em X. A **p-distribuição** associada a $\mathcal{F}$ é a distribuição definida pelo feixe $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$.*

Morfismo p-curvatura

$$\boxed{T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} = \{v \in T_{\mathcal{F}} \mid i_v\, \mathbf{C}(\omega) = 0\}} \tag{2}$$

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo $\mathcal{F}$ e é um subfeixe saturado em T_X.

Definição

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um não p-fechada em X. A **p-distribuição** associada a $\mathcal{F}$ é a distribuição definida pelo feixe $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$.*

Exemplo

A fórmula fundamental implica que se $\dim X = 2$ então $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ é o feixe nulo. De fato, dado $v \in T_{\mathcal{F}}$ temos que $0 \neq i_{v^p}\omega = i_v\, \boldsymbol{C}(\omega)^p$.

Morfismo p-curvatura

$$\boxed{T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} = \{v \in T_{\mathcal{F}} \mid i_v\, \mathbf{C}(\omega) = 0\}} \tag{2}$$

Pelas propriedades do Operador de Cartier segue que $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ independe da escolha da 1-forma fechada definindo $\mathcal{F}$ e é um subfeixe saturado em T_X.

Definição

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um não p-fechada em X. A **p-distribuição** associada a $\mathcal{F}$ é a distribuição definida pelo feixe $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$.*

Exemplo

A fórmula fundamental implica que se $\dim X = 2$ *então* $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ *é o feixe nulo. De fato, dado* $v \in T_{\mathcal{F}}$ *temos que* $0 \neq i_{v^p}\omega = i_v\, \boldsymbol{C}(\omega)^p$.

Considere o seguinte morfismo de feixes de conjuntos

$$\psi_{\mathcal{F}} \colon T_{\mathcal{F}} \longrightarrow \frac{T_X}{T_{\mathcal{F}}}$$

que associa v em $v^p \mod T_{\mathcal{F}}$.

Morfismo p-curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Morfismo p-curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Definição

O ***morfismo p-curvatura associado a*** *$\mathcal{F}$ é o mapa de $\mathcal{O}_X$-módulos:*

$$\varphi_{\mathcal{F}} \colon F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}}$$
$$\sum_i f_i \otimes v_i \mapsto \sum_i f_i v_i^p.$$

Morfismo p-curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Definição

*O **morfismo** p**-curvatura associado a** $\mathcal{F}$ é o mapa de $\mathcal{O}_X$-módulos:*

$$\varphi_{\mathcal{F}} \colon F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}}$$
$$\sum_i f_i \otimes v_i \mapsto \sum_i f_i v_i^p.$$

Nas condições acima, a folheação $\mathcal{F}$ é p-fechada se e somente se $\varphi_{\mathcal{F}} \equiv 0$.

Morfismo p-curvatura e Frobenius

As propriedades de derivações em característica positiva implicam que $\psi_{\mathcal{F}}$ é de fato um morfismo de feixes de grupos.

Definição

O ***morfismo*** p***-curvatura associado a*** $\mathcal{F}$ *é o mapa de* $\mathcal{O}_X$*-módulos:*

$$\varphi_{\mathcal{F}}\colon F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}}$$
$$\sum_i f_i \otimes v_i \mapsto \sum_i f_i v_i^p.$$

Nas condições acima, a folheação $\mathcal{F}$ é p-fechada se e somente se $\varphi_{\mathcal{F}} \equiv 0$.

Lembrar: O morfismo **Frobenius absoluto**, denotado por F_X, consiste no morfismo que é identidade a nível de espaços topológicos e a nível de funções é o morfismo de anéis p-potência

$$F_X = (f, f^{\#}) : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (X, \mathcal{O}_X)$$

onde $f = id$ e $f^{\#} : a \mapsto a^p$.

Morfismo p-curvatura

Considere o morfismo p-curvatura

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{F}} \colon F_X^* T_{\mathcal{F}} &\longrightarrow N_{\mathcal{F}} \\ \sum_i f_i \otimes v_i &\mapsto \sum_i f_i v_i^p . \end{aligned}$$

Morfismo p-curvatura

Considere o morfismo p-curvatura

$$\varphi_{\mathcal{F}} \colon F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}}$$
$$\sum_i f_i \otimes v_i \mapsto \sum_i f_i v_i^p.$$

Proposição

Temos $\mathrm{Ker}(\varphi_{\mathcal{F}}) = F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$ *onde* F_X *é o mapa Frobenius absoluto e existe um divisor efetivo* $\Delta_{\mathcal{F}} \in \mathrm{Div}(X)$ *tal que a sequencia*

$$0 \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}} \longrightarrow F_X^* T_{\mathcal{F}} \longrightarrow N_{\mathcal{F}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_X(-\Delta_{\mathcal{F}}) \longrightarrow 0$$

é exata em codimensão um, isto é, fora de um conjunto fechado de codimensão ≥ 2.

Folheações não p-fechadas: p-distribuição e p-divisor

Definição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não p-fechada em X. A ***p-distribuição*** *associada a $\mathcal{F}$ é o subfeixe de T_X definido por $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$. O p-**divisor** de $\mathcal{F}$ é o divisor $\Delta_{\mathcal{F}}$.*

Uma propriedade interessante do p-divisor está contida na seguinte proposição.

Folheações não p-fechadas: p-distribuição e p-divisor

Definição

*Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não p-fechada em X. A **p-distribuição** associada a $\mathcal{F}$ é o subfeixe de T_X definido por $T_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}}$. O p-**divisor** de $\mathcal{F}$ é o divisor $\Delta_{\mathcal{F}}$.*

Uma propriedade interessante do p-divisor está contida na seguinte proposição.

Proposição

Seja X uma variedade não singular sobre k e $\mathcal{F}$ uma folheação em X não p-fechada. Seja H uma hipersuperfície irredutível em X. Se H é $\mathcal{F}$-invariante então $\mathrm{ord}_H(\Delta_{\mathcal{F}}) > 0$. Reciprocamente, se $\mathrm{ord}_H(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \mod p$ então H é $\mathcal{F}$-invariante.

Consequências

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em uma variedade projetiva não singular X de dimensão pelo menos dois e definida sobre k. *Suponha que $\mathcal{F}$ seja não p-fechada. Então, a identidade*

$$\mathcal{O}_X(\Delta_{\mathcal{F}}) = \omega_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \otimes (\omega^*_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}})^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}}$$

vale em $\mathrm{Pic}(X)$.

Consequências

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em uma variedade projetiva não singular X de dimensão pelo menos dois e definida sobre k. Suponha que $\mathcal{F}$ seja não p-fechada. Então, a identidade

$$\mathcal{O}_X(\Delta_{\mathcal{F}}) = \omega_{\mathcal{F}}^{\otimes p} \otimes (\omega^*_{\mathcal{C}_{\mathcal{F}}})^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}}$$

vale em $\mathrm{Pic}(X)$.

Quando $X = \mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ a proposição acima implica que dada $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um não p-fechada e de grau d em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ temos a seguinte **fórmula do grau:**

$$\boxed{\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) = p(d - \deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}}) - 1) + d + 2} \qquad (3)$$

O p-divisor e propriedades

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{P}^n_{\mathrm{k}}$ tal que $p \nmid \deg(N_{\mathcal{F}})$. Então, $\mathcal{F}$ admite uma hipersuperfície invariante.

O p-divisor e propriedades

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{P}^n_k$ tal que $p \nmid \deg(N_{\mathcal{F}})$. Então, $\mathcal{F}$ admite uma hipersuperfície invariante.

Demonstração.

Seja ω a 1-forma projetiva definindo a folheação $\mathcal{F}$. Se $\mathcal{F}$ é p-fechada então $\mathcal{F}$ admite de fato uma infinidade de soluções. Assim, podemos supor que $\mathcal{F}$ é não p-fechada. Como $p \nmid \deg(N_{\mathcal{F}})$, segue da fórmula do grau que $\deg(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \mod p$. Em particular, $\Delta_{\mathcal{F}}$ não é um p-fator e assim existe um divisor primo H ocorrendo em $\Delta_{\mathcal{F}}$ com $\mathrm{ord}_H(\Delta_{\mathcal{F}}) \not\equiv 0 \mod p$. Tal divisor define uma hipersuperfície $\mathcal{F}$-invariante. □

Exemplo - Folheações em superfícies e o p-divisor

Seja X uma superfície projetiva não singular definida sobre k. Dar uma folheação em X equivale a dar um sistema $\{(U_i, \omega_i, v_i)\}_{i \in I}$ tal que:

- $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de X.
- Para cada $i \in I$ temos $v_i \in T_X(U_i)$, $\omega_i \in \Omega^1_{X/\mathrm{k}}(U_i)$ tais que $i_{v_i}\omega_i = 0$.
- Em $U_i \cap U_j$ temos $\omega_i = f_{ij}\omega_j$ e $v_i = g_{ij}v_j$ para algums funções $f_{ij}, g_{ij} \in \mathcal{O}^*_X(U_{ij})$.
- Para cada $i \in I$ temos $\mathrm{codim}(\omega_i) \geq 2$ e $\mathrm{codim}(v_i) \geq 2$.

Exemplo - Folheações em superfícies e o p-divisor

Seja X uma superfície projetiva não singular definida sobre k. Dar uma folheação em X equivale a dar um sistema $\{(U_i, \omega_i, v_i)\}_{i \in I}$ tal que:

- $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma cobertura aberta de X.
- Para cada $i \in I$ temos $v_i \in T_X(U_i)$, $\omega_i \in \Omega^1_{X/\mathrm{k}}(U_i)$ tais que $i_{v_i}\omega_i = 0$.
- Em $U_i \cap U_j$ temos $\omega_i = f_{ij}\omega_j$ e $v_i = g_{ij}v_j$ para algums funções $f_{ij}, g_{ij} \in \mathcal{O}^*_X(U_{ij})$.
- Para cada $i \in I$ temos $\mathrm{codim}(\omega_i) \geq 2$ e $\mathrm{codim}(v_i) \geq 2$.

As coleções $\{f_{ij}^{-1}\}, \{g_{ij}\}$ determinam elementos de $H^1(X, \mathcal{O}^*_X) = \mathrm{Pic}(X)$ e os fibrados lineares associados são os fibrado conormal $\Omega^1_{X/\mathcal{F}}$ e fibrado cotangente $\Omega^1_{\mathcal{F}}$ associados a $\mathcal{F}$. Um divisor na classe linear correspondente a $\Omega^1_{\mathcal{F}}$ é chamado de **divisor canônico** de $\mathcal{F}$ e denotado por $K_{\mathcal{F}}$.

Construção explícita do p-divisor

Seja $\mathcal{F} = \{(U_i, \omega_i, v_i)\}$ uma folheação em X que não é p-fechada. Em cada U_{ij} temos relações:

$$\omega_i = f_{ij}\omega_j \qquad v_i = g_{ij}v_j.$$

Como estamos assumindo que $\mathcal{F}$ é não p-fechada, temos para cada $i, j \in I$,

$$0 \neq i_{v_i^p}\omega_i = i_{(g_{ij}v_j)^p} f_{ij}\omega_j = i_{(g_{ij}^p v_j^p + g_{ij} v_j^{p-1}(g_{ij}^{p-1})v_j)} f_{ij}\omega_j = g_{ij}^p f_{ij} i_{v_j^p}\omega_j \neq 0.$$

A coleção $\{i_{v_i^p}\omega_i\}_{i\in I}$ determina uma seção $0 \neq s_{\mathcal{F}} \in \mathrm{H}^0(X, (\Omega^1_{\mathcal{F}})^{\otimes p} \otimes N_{\mathcal{F}})$.

Observação

O p-divisor associado a $\mathcal{F}$ é o divisor de zeros da seção $s_{\mathcal{F}}$:

$$\Delta_{\mathcal{F}} = (s_{\mathcal{F}})_0 \in \mathrm{Div}(X).$$

Exemplo - Equação global para p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_k$ com fibrado normal $N = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(d+2)$ e suponha que $p \nmid \deg(N)$. Suponha que $\mathcal{F}$ está definida pela 1-forma homogênea:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva:

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

[5] Proposition 1.1.4 - **Equations de Pfaff algébriques**

Exemplo - Equação global para p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_k$ com fibrado normal $N = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(d+2)$ e suponha que $p \nmid \deg(N)$. Suponha que $\mathcal{F}$ está definida pela 1-forma homogênea:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva:

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

Seja $v_\omega \in \mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^3_k)$ o campo homogêneo de grau d dado por

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

A associação $\omega \mapsto v_\omega$ define uma bijeção[5] entre o conjunto de 1-formas projetivas de grau $d+2$ e campos homogêneos em $\mathbb{A}^3_k$ de grau d com divergente zero

$$\operatorname{div}(v_\omega) = L_x + M_y + N_z = 0.$$

[5] Proposition 1.1.4 - **Equations de Pfaff algébriques**

Exemplo - Equação global para p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação em $\mathbb{P}^2_k$ com fibrado normal $N = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2_k}(d+2)$ e suponha que $p \nmid \deg(N)$. Suponha que $\mathcal{F}$ está definida pela 1-forma homogênea:

$$\omega = Adx + Bdy + Cdz$$

e escreva:

$$d\omega = (d+2)(Ldy \wedge dz - Mdx \wedge dz + Ndx \wedge dy).$$

Seja $v_\omega \in \mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^3_k)$ o campo homogêneo de grau d dado por

$$v_\omega = L\partial_x + M\partial_y + N\partial_z.$$

A associação $\omega \mapsto v_\omega$ define uma bijeção[5] entre o conjunto de 1-formas projetivas de grau $d+2$ e campos homogêneos em $\mathbb{A}^3_k$ de grau d com divergente zero

$$\operatorname{div}(v_\omega) = L_x + M_y + N_z = 0.$$

O p-**divisor** é dado explicitamente por

$$\Delta_{\mathcal{F}} = [i_{v_\omega^p}\omega] \in \operatorname{Div}(\mathbb{P}^2_k).$$

[5] Proposition 1.1.4 - **Equations de Pfaff algébriques**

O p-divisor e propriedades: exemplo I

Exemplo

Seja $\mathcal{F}$ a folheação de grau dois em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida pela 1-forma projetiva

$$\omega = yz^2dx - z(4yz + 2xz + 2y^2)dy + (xyz + 4y^2z + 2y^3)dz.$$

Para todo inteiro primo $p \in \mathbb{Z}_{>3}$ considere $\mathcal{F}_p$ a folheação em $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ obtida por redução módulo p da 1-forma ω. Então, $\mathcal{F}_p$ é não p-fechada e

$$\Delta_{\mathcal{F}_p} = 3\{y = 0\} + (p + 1)\{z = 0\}.$$

Restringindo ao aberto $D_+(z)$, uma conta local mostra que $\mathcal{F}_p$ não é p-fechada com $3\{y = 0\}$ único divisor ocorrendo em $\Delta_{\mathcal{F}_p}|_{D_+(z)}$ se $p > 3$. Como $\{z = 0\}$ é $\mathcal{F}$-invariante, segue por comparação de graus que $(p + 1)\{z = 0\}$ ocorre em $\Delta_{\mathcal{F}_p}$.

O p-divisor e propriedades: exemplo II

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida por uma 1-forma projetiva

$$\Omega = Adx + Bdy + Cdz.$$

Suponha que $A, B, C \in \mathbb{Z}[x, y, z]_{d+1}$ e seja $p\mathbb{Z} \in \boldsymbol{Spm}(\mathbb{Z})$ ideal maximal tal que $p \nmid d + 2$. Seja $\mathcal{F}_p$ a folheação em $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ obtida por redução módulo $p\mathbb{Z}$ de Ω. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ ***é irredutível*** *então $\mathcal{F}$* ***não admite soluções algébricas****.*

[6] **The Poincaré problem in the nondicritical case**

O p-divisor e propriedades: exemplo II

Proposição

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação não dicrítica em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ definida por uma 1-forma projetiva

$$\Omega = Adx + Bdy + Cdz.$$

Suponha que $A, B, C \in \mathbb{Z}[x,y,z]_{d+1}$ e seja $p\mathbb{Z} \in \boldsymbol{Spm}(\mathbb{Z})$ ideal maximal tal que $p \nmid d+2$. Seja $\mathcal{F}_p$ a folheação em $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_p}$ obtida por redução módulo $p\mathbb{Z}$ de Ω. Se $\Delta_{\mathcal{F}_p}$ ***é irredutível*** *então $\mathcal{F}$* ***não admite soluções algébricas***.

Isso pode ser usado para dar uma simples prova do Teorema de Jouanolou que diz que muitas folheações no pano complexo de grau $d \in \{2,3\}$ não possuem soluções algébricas. O ponto crucial aqui é uma cota para o grau de soluções algébricas fornecina por Carnicer.[6]

[6] **The Poincaré problem in the nondicritical case**

Exemplo

- $\mathcal{F}_d$ em[7] $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$:

$$\omega_d = (x^d z - y^{d+1})dx + (xy^d - z^{d+1})dy + (z^d y - x^{d+1})dz$$

$$v_d = z^d \partial_x + x^d \partial_y + y^d \partial_z$$

i. $(2, d) = (2, 3)$:

$$\Delta_{\mathcal{F}_3} = [i_{v_3^2} \omega_3] = \{X^7 Y^2 + X^3 Y^3 Z^3 + X^2 Z^7 + Y^7 Z^2 = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_2})$$

ii. $(2, d) = (2, 5)$:

$$\Delta_{\mathcal{F}_5} = [i_{v_5^2} \omega_5] = \{X^{11} Y^4 + X^5 Y^5 Z^5 + X^4 Z^{11} + Y^{11} Z^4 = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_2})$$

iii. $(2, d) = (2, 9)$:

$$\Delta_{\mathcal{F}_9} = [i_{v_9^2} \omega_9] = \{X^{19} Y^8 + X^9 Y^9 Z^9 + X^8 Z^{19} + Y^{19} Z^8 = 0\} \in \mathrm{Div}(\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{F}}_2})$$

Em todos os casos, o 2-divisor é irredutível e pela proposição anterior temos que $\mathcal{F}_d$ não admite soluções algébricas se $d \in \{3, 5, 9\}$.

[7] **Singular**: https://www.singular.uni-kl.de/

O p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$ e em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica $\mathcal{F}$?

O p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$ e em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica $\mathcal{F}$?

Por exemplo, será que muitas folheações em $\mathbb{P}^2_k$ possuem p-divisor reduzido? Irredutível?

O p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$ e em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica $\mathcal{F}$?

Por exemplo, será que muitas folheações em $\mathbb{P}^2_k$ possuem p-divisor reduzido? Irredutível?

Nessa direção, temos os seguintes resultados.

Teorema

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d$ e $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Então,

O p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$ e em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica $\mathcal{F}$?

Por exemplo, será que muitas folheações em $\mathbb{P}^2_k$ possuem p-divisor reduzido? Irredutível?

Nessa direção, temos os seguintes resultados.

Teorema

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d$ e $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Então,

- *Uma folheação genérica em $\mathbb{P}^2_k$ de grau $d \geq 1$ tem p-divisor reduzido, e*

O p-divisor em $\mathbb{P}^2_k$ e em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$

Problema

Seja X uma superfície algébrica não singular. O que podemos dizer sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$ para uma folheação genérica $\mathcal{F}$?

Por exemplo, será que muitas folheações em $\mathbb{P}^2_k$ possuem p-divisor reduzido? Irredutível?

Nessa direção, temos os seguintes resultados.

Teorema

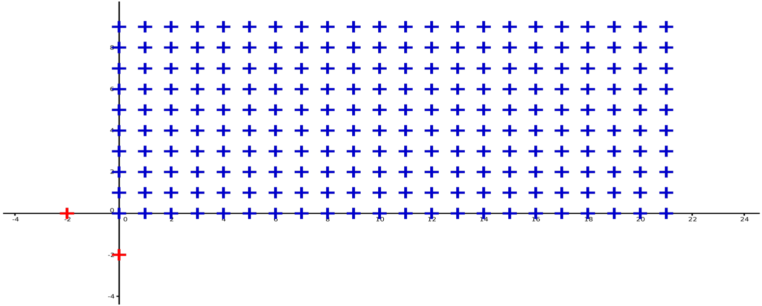
Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tais que $p \nmid d$ e $p \nmid d_i$, se $d_i \neq 0$. Então,

- *Uma folheação genérica em $\mathbb{P}^2_k$ de grau $d \geq 1$ tem p-divisor reduzido, e*
- *Uma folheação genérica em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ com divisor canônico $K \equiv d_1 F + d_2 M$ possui p-divisor não nulo e reduzido.*

Folheações de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}$

Uma folheação em $\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}$ será dita **de tipo** (d_1, d_2) se possui divisor canônico de bigrau (d_1, d_2). Os possíveis tipo estão contidos na região:[8]

$$S_0 = \{(d_1, d_2) \in \mathbb{Z}^2 \mid d_1, d_2 \geq 0\} \cup \{(-2, 0)\} \cup \{(0, -2)\}.$$



[8] Carlos Galindo, Francisco Monserrat, Jorge Olivares - **Foliations with isolated singularities on Hirzebruch surfaces**

Folheações de dimensão um e grau um p-fechadas

$$\mathbb{V}ec_d(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}) = \{[v] \in \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}})) \mid \mathrm{div}(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}))$$

Folheações de dimensão um e grau um p-fechadas

$$\mathbb{V}ec_d(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}) = \{[v] \in \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}})) \mid \mathrm{div}(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}))$$

Para cada $\alpha = [\alpha_0 : \cdots : \alpha_n] \in \mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ tal que $\sum_i \alpha_i = 0$ denote por $\mathcal{F}(\alpha)$ a folheação de dimensão um e grau um em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ determinada pelo campo $v(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \partial_{x_i}$ e considere a seguinte subvariedade de $\mathbb{V}ec_1(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}})$:

$$V(\alpha) = \overline{\{\mathcal{F} \in \mathbb{V}ec_1(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}) \mid \mathcal{F} \text{ é conjugada via } \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}) \text{ a } \mathcal{F}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)\}}.$$

Folheações de dimensão um e grau um p-fechadas

$$\mathbb{V}ec_d(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}) = \{[v] \in \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}})) \mid \mathrm{div}(v) = 0\} \subset \mathbb{P}(\mathfrak{X}_d(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}))$$

Para cada $\alpha = [\alpha_0 : \cdots : \alpha_n] \in \mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ tal que $\sum_i \alpha_i = 0$ denote por $\mathcal{F}(\alpha)$ a folheação de dimensão um e grau um em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ determinada pelo campo $v(\alpha) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x_i \partial_{x_i}$ e considere a seguinte subvariedade de $\mathbb{V}ec_1(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}})$:

$$V(\alpha) = \overline{\{\mathcal{F} \in \mathbb{V}ec_1(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}) \mid \mathcal{F} \text{ é conjugada via } \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}) \text{ a } \mathcal{F}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)\}}.$$

Teorema

Suponha que p não divide $n+1$ e denote por $\mathbb{V}ec_{1,0}(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}})$ o fechado que consiste das folheações p-fechadas. Se $\alpha = [\alpha_0 : \cdots : \alpha_n] \in \mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}(\mathbb{F}_p)$ e $\sum_i \alpha_i = 0$ então $V(\alpha)$ é uma componente irredutível de $\mathbb{V}ec_{1,0}(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}})$. Além disso, toda componente irredutível de tal espaço é dessa forma.

Exemplo

$$\begin{aligned}\Phi\colon\ \mathbb{P}^3_k &\dashrightarrow \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \\ [x_0 : x_1 : y_0 : y_1] &\mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])\end{aligned}$$

$$v = x_0\partial_{x_0} + x_1\partial_{x_1} - y_0\partial_{y_0} - y_1\partial_{y_1}$$

O campo v se identifica naturalmente com a matriz diagonal

$$D(1,1,-1,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Algumas consequências

- Denote por $i(n,p)$ o número de componentes irredutíves de $\mathbb{V}ec_{1,0}(\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}})$. Então,
$$p^{n-1}/(n-1)! \leq i(n,p) \leq p^{n}$$

Algumas consequências

- Denote por $i(n,p)$ o número de componentes irredutíves de $\mathbb{V}ec_{1,0}(\mathbb{A}^{n+1}_k)$. Então,
$$p^{n-1}/(n-1)! \leq i(n,p) \leq p^n$$

- Seja $\mathcal{C}$ uma folheação de dimensão um e grau um em $\mathbb{P}^3_k$. Suponha que $\mathcal{C}$ seja p-fechada e seja $\{\mathcal{C}_t\}_{t\in T}$ uma família de folheações p-fechadas com $\mathcal{C}_0 = \mathcal{C}$ para algum ponto fechado $0 \in T$. Se $\mathcal{C}$ é definida pela mapa racional
$$\begin{aligned} \Phi\colon\ \mathbb{P}^3_k &\dashrightarrow \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k \\ [x_0 : x_1 : y_0 : y_1] &\mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1]) \end{aligned}$$
então existe um aberto U contendo 0 tal que para todo $t \in U$ temos que $\mathcal{C}_t$ é definida por um mapa racional $\Phi_t : \mathbb{P}^3_k \dashrightarrow \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ de grau um com $\Phi_0 = \Phi$.

Aplicações: folheações de codimensão um em espaços projetivos

Uma folheação de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ é determinada por uma 1-forma homogênea em $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}$

$$\sigma = A_0 dx_0 + \cdots + A_n dx_n$$

onde $A_0 \ldots, A_n \in \mathrm{k}[x_0, \ldots, x_n]$ são polinômios homogêneos de grau $d+1$ e tal que $\mathrm{sing}(\sigma) = \mathcal{Z}(A_0 \ldots, A_n)$ tem codimensão maior que um e com σ satisfazendo as seguintes condições

$$i_R \sigma = \sum_i A_i x_i = 0 \qquad \sigma \wedge d\sigma = 0.$$

Aplicações: folheações de codimensão um em espaços projetivos

Uma folheação de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^{n}_{\mathrm{k}}$ é determinada por uma 1-forma homogênea em $\mathbb{A}^{n+1}_{\mathrm{k}}$

$$\sigma = A_0 dx_0 + \cdots + A_n dx_n$$

onde $A_0 \ldots, A_n \in \mathrm{k}[x_0, \ldots, x_n]$ são polinômios homogêneos de grau $d+1$ e tal que $\mathrm{sing}(\sigma) = \mathcal{Z}(A_0 \ldots, A_n)$ tem codimensão maior que um e com σ satisfazendo as seguintes condições

$$i_R\sigma = \sum_i A_i x_i = 0 \qquad \sigma \wedge d\sigma = 0.$$

A condição de integrabilidade se traduz em uma serie de equações:

$$A_i \left(\frac{\partial A_l}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_l} \right) + A_j \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_l} - \frac{\partial A_l}{\partial x_i} \right) + A_l \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right) = 0$$

para $0 \leq i < j < l \leq n$.

Folheações de codimensão um em espaços projetivos

O espaço de folheações de codimensão um e grau $d \geq 0$ em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ $(n \geq 2)$ será denotado por

$$\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}) = \{[\omega] \in \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}}(d+2))) \mid \omega \wedge d\omega = 0 \text{ e codim sing}(\omega) \geq 2\}.$$

Folheações de codimensão um em espaços projetivos

O espaço de folheações de codimensão um e grau $d \geq 0$ em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ ($n \geq 2$) será denotado por

$$\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}) = \{[\omega] \in \mathbb{P}(\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}, \Omega^1_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}}(d+2))) \mid \omega \wedge d\omega = 0 \text{ e } \operatorname{codim} \operatorname{sing}(\omega) \geq 2\}.$$

Problema

Descrever as componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}})$.

Algumas componentes de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}})(n \geq 3)$

Alguns resultados conhecidos:

- **Grau zero e grau um**: $\mathbb{F}\mathrm{ol}_0(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}})$ é irredutível e se identifica com a grassmaniana de retas em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}}$. Quando $d = 1$ o espaço $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}})$ admite precisamente duas componentes irredutíveis[9].

[9] Alcides Lins Neto, **Componentes irredutíveis dos espaços de folheações**

[10] **Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in $\mathbf{C}\mathrm{P}(n)$**

[11] **Codimension one foliations of degree three on projective spaces**

Algumas componentes de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})(n \geq 3)$

Alguns resultados conhecidos:

- **Grau zero e grau um**: $\mathbb{F}\mathrm{ol}_0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ é irredutível e se identifica com a grassmaniana de retas em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Quando $d = 1$ o espaço $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ admite precisamente duas componentes irredutíveis[9].

- **Grau dois**: Para folheações de codimensão um e grau $d = 2$ em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ Cerveau e Lins Neto mostraram[10] que $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ admite precisamente seis componentes irredutíveis e descrevem explicitamente tais componentes.

[9] Alcides Lins Neto, **Componentes irredutíveis dos espaços de folheações**

[10] **Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in C**$\mathrm{P}(n)$

[11] **Codimension one foliations of degree three on projective spaces**

Algumas componentes de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})(n \geq 3)$

Alguns resultados conhecidos:

- **Grau zero e grau um**: $\mathbb{F}\mathrm{ol}_0(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ é irredutível e se identifica com a grassmaniana de retas em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Quando $d = 1$ o espaço $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ admite precisamente duas componentes irredutíveis[9].

- **Grau dois**: Para folheações de codimensão um e grau $d = 2$ em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ Cerveau e Lins Neto mostraram[10] que $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ admite precisamente seis componentes irredutíveis e descrevem explicitamente tais componentes.

- **Grau três**: Em um trabalho recente[11], R.C. da Costa, R. Lizarbe e J.V Pereira, usando um teorema de estrutura para folheações de codimensão um e grau $d = 3$ em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ descrevem precisamente 18 componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ cujo elemento genérico não admite integral primeira meromorfa. Os autores mostram ainda que $\mathbb{F}\mathrm{ol}_3(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$ possui pelo menos 24 componentes irredutíveis distintas.

---

[9] Alcides Lins Neto, **Componentes irredutíveis dos espaços de folheações**

[10] **Irreducible components of the space of holomorphic foliations of degree two in C**$\mathrm{P}(n)$

[11] **Codimension one foliations of degree three on projective spaces**

Componentes clássicas em grau $d \geq 3$

- **Componentes racionais**: Sejam F, G polinômios irredutíveis homogêneos de graus p e q respectivamente. Suponha que F e G sejam coprimos e que $d = p + q - 2$. Então, $\omega = qFdG - pdG$ define uma folheação em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de grau d. Denote por $\mathrm{Rat}(p, q)$ o conjunto de folheações desse tipo. Então, o fecho $\overline{\mathrm{Rat}(p, q)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$[12].

[12] Gómez-Mont e Lins Neto - **Structural stability of foliations with a meromorphic first integral**

[13] Cerveau, Lins Neto e Edixhoven - **Pull-back components of the space of holomorphic foliations on $\mathbb{CP}(n)$, $n \geq 3$**

Componentes clássicas em grau $d \geq 3$

- **Componentes racionais**: Sejam F, G polinômios irredutíveis homogêneos de graus p e q respectivamente. Suponha que F e G sejam coprimos e que $d = p + q - 2$. Então, $\omega = qFdG - pdG$ define uma folheação em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ de grau d. Denote por $\mathrm{Rat}(p, q)$ o conjunto de folheações desse tipo. Então, o fecho $\overline{\mathrm{Rat}(p,q)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$[12].

- **Componentes do tipo pullback**: Seja $\mathcal{G}$ uma folheação de codimensão um em $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e grau e. Suponha que $\mathcal{G}$ está definida por uma 1-forma projetiva ω e seja $F : \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \dashrightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ um mapa racional dominante de grau m. Então, $F^*\omega$ define um folheação de grau $d = (e+2)m - 2$ em $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$. Denote por $\mathrm{PB}(m, e, n)$ o conjunto de folheações desse tipo. Então, o fecho $\overline{\mathrm{PB}(m,e,n)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{e}+2)\mathrm{m}\text{-}2}(\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}})$.[13]

[12] Gómez-Mont e Lins Neto - **Structural stability of foliations with a meromorphic first integral**

[13] Cerveau, Lins Neto e Edixhoven - **Pull-back components of the space of holomorphic foliations on $\mathbb{CP}(n)$, $n \geq 3$**

Componentes clássicas em grau $d \geq 3$

- **Componentes logarítmicas**: Sejam $d_1, d_2, \ldots, d_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ e $F_1, \ldots, F_r$ polinômios homogêneos com $d_i = \deg(F_i)$. Suponha que $F_1, \ldots, F_r$ são irredutíveis e primos entre si. Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{C}^*$ tais que $\sum_{i=1}^r \alpha_i d_i = 0$ e considere a 1-forma

$$\Omega = F_1 F_2 \cdots F_{r-1} F_r \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \frac{dF_i}{F_i}.$$

A 1-forma Ω define uma $\mathcal{F}_\Omega$ folheação de codimensão um e grau $d = \sum_i d_i - 2$ em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}}$. Nesse caso dizemos que $\mathcal{F}_\Omega$ é uma folheação logarítimica de tipo $(d_1, \ldots, d_r)$. Denote por $\mathrm{Log}_n(d_1, \ldots, d_r)$ o conjunto de folheações logarítmicas em $\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}}$ de tipo $(d_1, \ldots, d_r)$. Então o fecho $\overline{\mathrm{Log}_n(d_1, \ldots, d_r)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}})$[14].[15]

[14] O.Calvo-Andrade - **Irreducible components of the space of foliations**

[15] F. Cukierman, J. Gargiulo e C. D. Massri - **Stability of logarithmic differential one-forms**

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^3_\mathbb{C})$

No que se segue, usamos folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^3_\mathbb{C})$.

[16] R.C Costa, R. Lizarbe e J.V Pereira - **Codimension one foliations of degree three on projective spaces**

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

No que se segue, usamos folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Seja $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grau um.

[16] R.C Costa, R. Lizarbe e J.V Pereira - **Codimension one foliations of degree three on projective spaces**

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

No que se segue, usamos folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Seja $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grau um.

Dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seja $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\Psi_{(d;d_1,d_2)} : \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$$

$$(\Phi, \mathcal{G}) \longmapsto \Phi^*\mathcal{G}$$

[16] R.C Costa, R. Lizarbe e J.V Pereira - **Codimension one foliations of degree three on projective spaces**

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

No que se segue, usamos folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Seja $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grau um.

Dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seja $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\Psi_{(d;d_1,d_2)} : \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$$

$$(\Phi, \mathcal{G}) \longmapsto \Phi^*\mathcal{G}$$

Teorema A

Seja $C_{(d;d_1,d_2)}$ a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$. Então, $C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

[16] R.C Costa, R. Lizarbe e J.V Pereira - **Codimension one foliations of degree three on projective spaces**

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

No que se segue, usamos folheações em característica positiva para exibir novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Seja $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}})$ a coleção de mapas racionais de $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ em $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ de grau um.

Dados $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ seja $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\Psi_{(d;d_1,d_2)} : \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$$

$$(\Phi, \mathcal{G}) \longmapsto \Phi^*\mathcal{G}$$

Teorema A

Seja $C_{(d;d_1,d_2)}$ a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$. Então, $C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

O resultado generaliza uma componente encontrada em grau $d = 3$ por R.C Costa, R. Lizarbe e J.V Pereira.[16]

[16] R.C Costa, R. Lizarbe e J.V Pereira - **Codimension one foliations of degree three on projective spaces**

Grau do p-divisor em vizinhanças

Para demonstração do teorema principal é necessário um estudo sobre o comportamento do p-divisor em vizinhanças.

Grau do p-divisor em vizinhanças

Para demonstração do teorema principal é necessário um estudo sobre o comportamento do p-divisor em vizinhanças.

Teorema

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- *$\mathcal{F}$ é não p-fechada com p-divisor **reduzido**.*
- *A p-folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ tem grau $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Grau do p-divisor em vizinhanças

Para demonstração do teorema principal é necessário um estudo sobre o comportamento do p-divisor em vizinhanças.

Teorema

Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- *$\mathcal{F}$ é não p-fechada com p-divisor* ***reduzido****.*
- *A p-folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}}$ tem grau $e \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.*

Então, existe um aberto $U_{\mathcal{F}}$ do espaço de folheações de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^3_k$ que contem $\mathcal{F}$ tal que para qualquer folheação $\mathcal{F}' \in U_{\mathcal{F}}$ temos

1. *$\mathcal{F}'$ é não p-fechada e $\Delta_{\mathcal{F}'}$ não admite p-fatores e $\deg(\Delta_{\mathcal{F}'}) \geq \deg(\Delta_{\mathcal{F}})$.*
2. *A p-folheação $\mathcal{C}_{\mathcal{F}'}$ tem grau $e' \leq e$.*

Grau do p-divisor em vizinhanças

A prova consiste em reduzir a um problema de polinômios. É consequência da propriedade de invariância do p-divisor e da seguinte proposição.

Grau do p-divisor em vizinhanças

A prova consiste em reduzir a um problema de polinômios. É consequência da propriedade de invariância do p-divisor e da seguinte proposição.

Proposição

Sejam $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ e k um corpo de característica $p > 0$. Considere $\mathbb{P}_{\mathrm{k}}^{M_d}$ o espaço projetivo nas variáveis: x_0, x_1, x_2, x_3. Seja $G \in \mathrm{k}[x_0, x_1, x_2, x_3]_d$ um polinômio homogêneo de grau d tal que $G = FE^p$ com F livre de p-potências. Então, existe um aberto em torno de $[G]$ tal que para qualquer $[\tilde{G}] \in U_G$ temos que $\tilde{G} = \tilde{F}\tilde{E}^p$ com $\tilde{F}$ livre de p-potências com $\deg(\tilde{F}) \geq \deg(F)$.

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}})$

- k = corpo de característica $p > d + 2$.
- $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}})$ = espaço parametrizando as folheações em $\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}$ com divisor canônico de tipo (d_1, d_2).
- $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}}, \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}})$ = coleção de mapas racionais de grau um.

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}})$

- k = corpo de característica $p > d + 2$.
- $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}})$ = espaço parametrizando as folheações em $\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}$ com divisor canônico de tipo (d_1, d_2).
- $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}}, \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}})$ = coleção de mapas racionais de grau um.

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\begin{aligned}\Psi_{(d;d_1,d_2)} : \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}}, \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}) &\dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}}) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\longmapsto \Phi^*\mathcal{G}.\end{aligned}$$

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}})$

- k = corpo de característica $p > d + 2$.
- $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}})$ = espaço parametrizando as folheações em $\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}$ com divisor canônico de tipo (d_1, d_2).
- $\mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}}, \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}})$ = coleção de mapas racionais de grau um.

Sejam $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e $d = d_1 + d_2 + 2$ e considere o mapa racional

$$\begin{aligned} \Psi_{(d;d_1,d_2)} : \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}}, \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathrm{k}} \times \mathbb{P}^1_{\mathrm{k}}) &\dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}}) \\ (\Phi, \mathcal{G}) &\longmapsto \Phi^*\mathcal{G}. \end{aligned}$$

Teorema B

Seja $X_{(d;d_1,d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$. Então, $X_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathrm{k}})$.

Ideia de prova

Passo 1: Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ para alguma folheação $\mathcal{G}$ de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ onde Φ é o mapa racional que associa $[x_0 : x_1 : y_0 : y_1] \mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])$,
- $\mathcal{G}$ não p-fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Ideia de prova

Passo 1: Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ para alguma folheação $\mathcal{G}$ de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ onde Φ é o mapa racional que associa $[x_0 : x_1 : y_0 : y_1] \mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])$,
- $\mathcal{G}$ não p-fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Passo 2: Note que $\mathcal{F}$ é não p-fechada e temos que $\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^*\Delta_{\mathcal{G}}$ (comparação de graus). Seja T uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_k)$ contendo a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ a família parametrizada por T com $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Ideia de prova

Passo 1: Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ para alguma folheação $\mathcal{G}$ de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ onde Φ é o mapa racional que associa $[x_0 : x_1 : y_0 : y_1] \mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])$,
- $\mathcal{G}$ não p-fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Passo 2: Note que $\mathcal{F}$ é não p-fechada e temos que $\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^*\Delta_{\mathcal{G}}$ (comparação de graus). Seja T uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_k)$ contendo a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t\in T}$ a família parametrizada por T com $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Passo 3: Seja U um aberto de T contendo 0 tal que para todo $t \in U$ temos $\mathcal{F}_t$ não p-fechada. Nesse caso, para todo $t \in U$ temos a p-folheação associada: $\{\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}\}_{t\in U}$. O comportamento do grau do p-divisor em vizinhanças implica que reduzindo U podemos supor $\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}) \leq 1$ para $t \in U$.

Ideia de prova

Passo 1: Seja $\mathcal{F}$ uma folheação de grau $d \geq 3$ em $\mathbb{P}^3_k$ e suponha que

- $\mathcal{F} = \Phi^*\mathcal{G}$ para alguma folheação $\mathcal{G}$ de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$ onde Φ é o mapa racional que associa $[x_0 : x_1 : y_0 : y_1] \mapsto ([x_0 : x_1], [y_0 : y_1])$,
- $\mathcal{G}$ não p-fechada e com $\Delta_{\mathcal{G}}$ reduzido.

Passo 2: Note que $\mathcal{F}$ é não p-fechada e temos que $\Delta_{\mathcal{F}} = \Phi^*\Delta_{\mathcal{G}}$ (comparação de graus). Seja T uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_d(\mathbb{P}^3_k)$ contendo a imagem de $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ a família parametrizada por T com $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}$.

Passo 3: Seja U um aberto de T contendo 0 tal que para todo $t \in U$ temos $\mathcal{F}_t$ não p-fechada. Nesse caso, para todo $t \in U$ temos a p-folheação associada: $\{\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}\}_{t \in U}$. O comportamento do grau do p-divisor em vizinhanças implica que reduzindo U podemos supor $\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}) \leq 1$ para $t \in U$.

Passo 4: Uma comparação de graus mostra que $\mathcal{F}$ não está na componente das folheações que são pullbacks lineares de folheações em $\mathbb{P}^2_k$. Reduzindo a um aberto V em torno de 0 podemos supor que $\deg(\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}) = 1$ em V.

Ideia de prova

Passo 5: Como $\deg(\mathcal{F}_t) > 2$ podemos supor que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}$ é p-fechada. Caso contrário, existiria um campo homogêneo v_t de grau um tangente a $\mathcal{F}_t$ tal que $v_t \wedge v_t^p$ é não nulo e que define $\mathcal{F}_t$, o que é uma contradição por comparação de graus.

Ideia de prova

Passo 5: Como $\deg(\mathcal{F}_t) > 2$ podemos supor que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}$ é p-fechada. Caso contrário, existiria um campo homogêneo v_t de grau um tangente a $\mathcal{F}_t$ tal que $v_t \wedge v_t^p$ é não nulo e que define $\mathcal{F}_t$, o que é uma contradição por comparação de graus.

Passo 6: Por um lema técnico, garantimos que $\mathcal{F}_t$ é um pullback por uma aplicação racional de grau um de uma folheação de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$.

Ideia de prova

Passo 5: Como $\deg(\mathcal{F}_t) > 2$ podemos supor que $\mathcal{C}_{\mathcal{F}_t}$ é p-fechada. Caso contrário, existiria um campo homogêneo v_t de grau um tangente a $\mathcal{F}_t$ tal que $v_t \wedge v_t^p$ é não nulo e que define $\mathcal{F}_t$, o que é uma contradição por comparação de graus.

Passo 6: Por um lema técnico, garantimos que $\mathcal{F}_t$ é um pullback por uma aplicação racional de grau um de uma folheação de tipo (d_1, d_2) em $\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k$.

Passo 7: As considerações acima mostram que existe um aberto $U_{\mathcal{F}}$ no espaço das folheações de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^n_k$ contendo $\mathcal{F}$ que admite a seguinte propriedade:

- Para toda folheação $\tilde{\mathcal{F}} \in U_{\mathcal{F}}$ temos que $\tilde{\mathcal{F}} = \gamma^* \tilde{\mathcal{G}}$ para alguma $\tilde{\mathcal{G}} \in \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(d_1,d_2)}(\mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k)$ e $\gamma \in \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_k, \mathbb{P}^1_k \times \mathbb{P}^1_k)$.

Logo, $U_{\mathcal{F}} \subset X_{(d;d_1,d_2)}$ e por passagem ao fecho de Zariski concluímos $T = X_{(d;d_1,d_2)}$.

Redução módulo p

- $X = \mathcal{Z}(F_0, \ldots, F_r) \subset \mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ variedade irredutível.
- $R = \mathbb{Z}$-álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em $F_0, \ldots, F_r$.

Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R)$ de R temos que o corpo $k(\mathfrak{p}) = R/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Redução módulo p

- $X = \mathcal{Z}(F_0, \ldots, F_r) \subset \mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ variedade irredutível.
- $R = \mathbb{Z}$-álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em $F_0, \ldots, F_r$.

Para cada ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R)$ de R temos que o corpo $k(\mathfrak{p}) = R/\mathfrak{p}$ é finito, em particular, de característica $p > 0$.

Proposição (Bertini-Noether)

Sejam $\mathfrak{p} \in \boldsymbol{Spm}(R)$ um ideal maximal de R e considere $X_{\mathfrak{p}}$ a variedade definida sobre $\overline{k(\mathfrak{p})}$ obtida por redução módulo $\mathfrak{p}$ dos polinômios $F_0, \ldots, F_r$. Então, $X_{\mathfrak{p}}$ é irredutível e $\dim X = \dim X_{\mathfrak{p}}$ para quase todo ideal maximal de R, isto é, para todo ideal maximal de R fora de conjunto fechado próprio $E \subset \boldsymbol{Spm}(R)$.

Componentes irredutíveis e redução módulo p

Sejam X uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ dada por polinômios $F_0, \ldots, F_r \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_M]$ e $Y \subset X$ um fechado irredutível dado por polinômios $H_0, \ldots, H_k \in \mathbb{C}[x_0, \ldots, x_M]$. Seja Z uma componente irredutível de X contendo Y e suponha que esteja dada por polinômios $G_0, \ldots, G_l$. Denote por R a $\mathbb{Z}$-álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem nos polinômios

$$F_0, \ldots, F_r, G_0, \ldots, G_l, H_0, \ldots, H_k.$$

Componentes irredutíveis e redução módulo p

Sejam X uma variedade projetiva em $\mathbb{P}^M_{\mathbb{C}}$ dada por polinômios $F_0, \dots, F_r \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_M]$ e $Y \subset X$ um fechado irredutível dado por polinômios $H_0, \dots, H_k \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_M]$. Seja Z uma componente irredutível de X contendo Y e suponha que esteja dada por polinômios $G_0, \dots, G_l$. Denote por R a $\mathbb{Z}$-álgebra finitamente gerada obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem nos polinômios

$$F_0, \dots, F_r, G_0, \dots, G_l, H_0, \dots, H_k.$$

Corolário

Suponha que exista um conjunto denso S de $\boldsymbol{Spm}(R)$ tal que $Y_{\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$ para todo ideal $\mathfrak{p} \in S$. Então, $Y = Z$ e assim Y é uma componente irredutível de X.

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

Considere o mapa racional

$$\Psi_{(d;d_1,d_2)}\colon \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$$
$$(\Phi, \mathcal{G}) \mapsto \Phi^*\mathcal{G}.$$

Novas componentes irredutíveis de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$

Considere o mapa racional

$$\begin{aligned}\Psi_{(d;d_1,d_2)} \colon \mathrm{Map}_1(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}, \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) \times \mathbb{F}\mathrm{ol}_{(\mathrm{d}_1,\mathrm{d}_2)}(\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}) & \dashrightarrow \mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}) \\ (\Phi, \mathcal{G}) & \mapsto \Phi^*\mathcal{G}.\end{aligned}$$

Teorema A

Seja $C_{(d;d_1,d_2)}$ o fecho de Zariski da imagem $\Psi_{(d;d_1,d_2)}$. Então, $C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Sabemos que o enunciado análogo sobre característica $p > d + 2$ é verdadeiro.

Demonstração do Teorema A

- **Passo I:** Sejam Z uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0,\ldots,E_h\}$ a união de uma coleção de polinômios a coeficientes em $\mathbb{C}$ que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.

Demonstração do Teorema A

- **Passo I:** Sejam Z uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0,\ldots,E_h\}$ a união de uma coleção de polinômios a coeficientes em $\mathbb{C}$ que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.
- **Passo II:** Seja R a $\mathbb{Z}$-álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em $E_0,\ldots,E_h$ e T o conjunto fechado em $\mathbf{Spm}(R)$ dado por $\cup_{j=2}^{d+2} V(jR) \subset \mathbf{Spm}(R)$. O Teorema B (componente em característica positiva) garante que para todo ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R) - T$ temos que $C_{(d;d_1,d_2),\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$.

Demonstração do Teorema A

- **Passo I:** Sejam Z uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0,\ldots,E_h\}$ a união de uma coleção de polinômios a coeficientes em $\mathbb{C}$ que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$.
- **Passo II:** Seja R a $\mathbb{Z}$-álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em $E_0,\ldots,E_h$ e T o conjunto fechado em $\mathbf{Spm}(R)$ dado por $\cup_{j=2}^{d+2} V(jR) \subset \mathbf{Spm}(R)$. O Teorema B (componente em característica positiva) garante que para todo ideal maximal $\mathfrak{p} \in \mathbf{Spm}(R) - T$ temos que $C_{(d;d_1,d_2),\mathfrak{p}} = Z_{\mathfrak{p}}$.
- **Passo III:** Pelo corolário anterior, temos que $Z = C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_{\mathrm{d}}(\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}})$, o que encerra a demonstração.

Demonstração do Teorema A

- **Passo I:** Sejam Z uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^3_\mathbb{C})$ contendo $C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\{E_0,\ldots,E_h\}$ a união de uma coleção de polinômios a coeficientes em $\mathbb{C}$ que descrevem as variedades: $Z, C_{(d;d_1,d_2)}$ e $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^3_\mathbb{C})$.
- **Passo II:** Seja R a $\mathbb{Z}$-álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes que ocorrem em $E_0,\ldots,E_h$ e T o conjunto fechado em $\mathbf{Spm}(R)$ dado por $\cup_{j=2}^{d+2}V(jR)\subset \mathbf{Spm}(R)$. O Teorema B (componente em característica positiva) garante que para todo ideal maximal $\mathfrak{p}\in\mathbf{Spm}(R)-T$ temos que $C_{(d;d_1,d_2),\mathfrak{p}}=Z_\mathfrak{p}$.
- **Passo III:** Pelo corolário anterior, temos que $Z=C_{(d;d_1,d_2)}$ é uma componente irredutível de $\mathbb{F}\mathrm{ol}_\mathrm{d}(\mathbb{P}^3_\mathbb{C})$, o que encerra a demonstração.

Corolário

O espaço de folheações holomorfas de codimensão um e grau d em $\mathbb{P}^3_\mathbb{C}$ possui pelo menos $\left\lfloor\frac{d-1}{2}\right\rfloor$ componentes irredutíveis distintas com elemento genérico não admitindo um fator de integração polinomial.

Obrigado :-)