Mapas polinomiais e domínios unimodulares

Wodson Mendson

Student algebraic geometry seminar - IMPA

18 de março de 2022

Mapas polinomiais em $\mathbb{A}^n_k$

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}$,$\overline{\mathbb{F}}_p$)

$\mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n]$ = anel de polinômios com coeficientes em k

Mapas polinomiais em $\mathbb{A}^n_k$

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}$,$\overline{\mathbb{F}}_p$)

$\mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n]$ = anel de polinômios com coeficientes em k

Definição

Um mapa polinomial em $\mathbb{A}^n_k$ é um mapa da forma

$$\begin{aligned} f = (F_1, \ldots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_k &\longrightarrow \mathbb{A}^n_k \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

com $F_i \in \mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n]$ para todo i.

Mapas polinomiais em $\mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}}_p$)

$\mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n]$ = anel de polinômios com coeficientes em k

Definição

Um mapa polinomial em $\mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ é um mapa da forma

$$\begin{aligned} f = (F_1, \ldots, F_n) \colon \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}} &\longrightarrow \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}} \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

com $F_i \in \mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n]$ para todo i.

Dizemos que um mapa polinomial $f = (F_1, \ldots, F_n)$ é invertível se existir um mapa polinomial $g = (G_1, \ldots, G_n) \colon \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ tal que

$$X_i = G_i(F_1, \ldots, F_n) \qquad Y_i = F_i(G_1, \ldots, G_n) \quad \text{para todo} \quad i.$$

Mapas polinomiais em $\mathbb{A}^n_k$

k = corpo algebricamente fechado de característica $p \geq 0$ (exemplo: $\mathbb{C}, \overline{\mathbb{F}}_p$)

$k[X_1, \ldots, X_n]$ = anel de polinômios com coeficientes em k

Definição

Um mapa polinomial em $\mathbb{A}^n_k$ é um mapa da forma

$$\begin{aligned} f = (F_1, \ldots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_k &\longrightarrow \mathbb{A}^n_k \\ (x_1, \ldots, x_n) &\mapsto (F_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, F_n(x_1, \ldots, x_n)) \end{aligned}$$

com $F_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$ para todo i.

Dizemos que um mapa polinomial $f = (F_1, \ldots, F_n)$ é invertível se existir um mapa polinomial $g = (G_1, \ldots, G_n) \colon \mathbb{A}^n_k \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$ tal que

$$X_i = G_i(F_1, \ldots, F_n) \qquad Y_i = F_i(G_1, \ldots, G_n) \quad \text{para todo} \quad i.$$

Observação: Se existir G satisfazendo $X_i = G_i(F_1, \ldots, F_n)$ para todo i então automaticamente $Y_i = F_i(G_1, \ldots, G_n)$ para todo i.

Mapas polinomiais: álgebra linear

Mapas lineares são casos particulares de mapas polinomiais onde $F_1, \ldots, F_n$ são polinômios homogêneos de grau **um**. Para tais mapas existe um critério simples para invertibilidade.

Mapas polinomiais: álgebra linear

Mapas lineares são casos particulares de mapas polinomiais onde $F_1, \ldots, F_n$ são polinômios homogêneos de grau **um**. Para tais mapas existe um critério simples para invertibilidade.

Escreva $F_j(X_1, \ldots, X_n) = \sum_i a_{ij} X_i$ com $a_{ij} \in \mathrm{k}$ e defina $A = (a_{ij})$ a matriz associada.

Mapas polinomiais: álgebra linear

Mapas lineares são casos particulares de mapas polinomiais onde $F_1, \ldots, F_n$ são polinômios homogêneos de grau **um**. Para tais mapas existe um critério simples para invertibilidade.

Escreva $F_j(X_1, \ldots, X_n) = \sum_i a_{ij} X_i$ com $a_{ij} \in \mathrm{k}$ e defina $A = (a_{ij})$ a matriz associada.
Então,

- $f = (F_1, \ldots, F_n)$ é invertível se e somente se $\det(A) \in \mathrm{k}^*$,
- $f = (F_1, \ldots, F_n)$ é injetivo se e somente se f é invertível.

Mapas polinomiais: álgebra linear

Mapas lineares são casos particulares de mapas polinomiais onde $F_1, \dots, F_n$ são polinômios homogêneos de grau **um**. Para tais mapas existe um critério simples para invertibilidade.

Escreva $F_j(X_1, \dots, X_n) = \sum_i a_{ij} X_i$ com $a_{ij} \in \mathrm{k}$ e defina $A = (a_{ij})$ a matriz associada.
Então,

- $f = (F_1, \dots, F_n)$ é invertível se e somente se $\det(A) \in \mathrm{k}^*$,
- $f = (F_1, \dots, F_n)$ é injetivo se e somente se f é invertível.

Observe que A é a matriz Jacobiana associada a f:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} = J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_{n-1}} & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & \frac{\partial F_n}{\partial X_2} & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial X_{n-1}} & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

Mapas polinomiais

Pode-se indagar se as observações anteriores se estendem em um contexto mais geral. Mais precisamente, seja $f\colon \mathbb{A}^n_k \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$ um mapa que associa

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (F_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, F_n(a_1, \ldots, a_n))$$

com $F_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$ (sem restrição de grau). Denote por

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & . & \cdots & . & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & . & \cdots & . & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

a matriz jacobiana associada ao mapa f.

Mapas polinomiais

Pode-se indagar se as observações anteriores se estendem em um contexto mais geral. Mais precisamente, seja $f\colon \mathbb{A}^n_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathrm{k}}$ um mapa que associa

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto (F_1(a_1, \ldots, a_n), \ldots, F_n(a_1, \ldots, a_n))$$

com $F_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$ (sem restrição de grau). Denote por

$$J_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & . & \cdots & . & \frac{\partial F_1}{\partial X_n} \\ . & . & \cdots & . & . \\ . & . & \cdots & . & . \\ \frac{\partial F_n}{\partial X_1} & . & \cdots & . & \frac{\partial F_n}{\partial X_n} \end{bmatrix}$$

a matriz jacobiana associada ao mapa f.

- O mapa f é invertível se e somente se $\det(J_F) \in \mathrm{k}^*$?
- Se f é injetivo então f é invertível?

Na generalidade em questão podemos encontrar exemplos que respondam negativamente as questões acima.

Na generalidade em questão podemos encontrar exemplos que respondam negativamente as questões acima.

Exemplo

Se $\mathrm{k} = \overline{\mathbb{F}}_p$ *e* $f = (X + X^p)\colon \mathbb{A}_{\mathrm{k}}^1 \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathrm{k}}^1$ *então* $\det J_F = 1$ *mas* f *não é invertível. De fato, se* g *é a inversa então a igualdade* $f \circ g = X$ *implica que* $p \deg(g) = 1$*, o que é um absurdo.*

Na generalidade em questão podemos encontrar exemplos que respondam negativamente as questões acima.

Exemplo

Se $\mathrm{k} = \overline{\mathbb{F}}_p$ *e* $f = (X + X^p)\colon\ \mathbb{A}^1_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathrm{k}}$ *então* $\det J_F = 1$ *mas* f *não é invertível. De fato, se* g *é a inversa então a igualdade* $f \circ g = X$ *implica que* $p\deg(g) = 1$*, o que é um absurdo.*

Exemplo

Se $\mathrm{k} = \overline{\mathbb{F}}_p$ *e* $f = (X_1^p, \ldots, X_n^p)\colon\ \mathbb{A}^n_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathrm{k}}$ *então* f *é uma bijeção mas não invertível.*

Na generalidade em questão podemos encontrar exemplos que respondam negativamente as questões acima.

Exemplo

Se $\mathrm{k} = \overline{\mathbb{F}}_p$ *e* $f = (X + X^p)\colon \mathbb{A}^1_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^1_{\mathrm{k}}$ *então* $\det J_F = 1$ *mas* f *não é invertível. De fato, se* g *é a inversa então a igualdade* $f \circ g = X$ *implica que* $p \deg(g) = 1$*, o que é um absurdo.*

Exemplo

Se $\mathrm{k} = \overline{\mathbb{F}}_p$ *e* $f = (X_1^p, \ldots, X_n^p)\colon \mathbb{A}^n_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathrm{k}}$ *então* f *é uma bijeção mas não invertível.*

Observação

Seja $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathrm{k}}$ *um mapa polinomial. Então* f *é invertível se e somente se* $\mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n] = \mathrm{k}[F_1, \ldots, F_n]$*.*

Alguns resultados conhecidos

k = algebricamente fechado de característica zero.

Teorema (Cynk-Rusek)

[a] *Sejam X uma variedade algébrica afim definida sobre k e $f : X \longrightarrow X$ um morfismo. Então, são equivalentes:*

1. (i) *f é injetivo,*
2. (ii) *f é bijeção,*
3. (iii) *f é um automorfismo.*

[a] Cynk-Rusek - **Injective endomorphisms of algebraic and analytic sets**

Alguns resultados conhecidos

k = algebricamente fechado de característica zero.

Teorema (Cynk-Rusek)

[a] *Sejam X uma variedade algébrica afim definida sobre* k *e* $f\colon X \longrightarrow X$ *um morfismo. Então, são equivalentes:*

1. f *é injetivo,*
2. f *é bijeção,*
3. f *é um automorfismo.*

[a] Cynk-Rusek - **Injective endomorphisms of algebraic and analytic sets**

A implicação $(i) \Longrightarrow (ii)$ é conhecida como Teorema de Ax-Grothendieck e vale se k tem característica positiva.

Ideia de prova: $(i) \Longrightarrow (ii)$

Seja $f\colon X \longrightarrow X$ um mapa polinomial injetivo ($\mathbf{char}(\mathrm{k}) \geq 0$). Suponha por contradição que f é injetivo mas não bijetor.

Ideia de prova: $(i) \Longrightarrow (ii)$

Seja $f\colon X \longrightarrow X$ um mapa polinomial injetivo ($\mathbf{char}(\mathrm{k}) \geq 0$). Suponha por contradição que f é injetivo mas não bijetor.

Passo 1: Formule as condições de não-sobrejetividade, injetividade e pertinência em termos de equações polinomiais.

Ideia de prova: $(i) \Longrightarrow (ii)$

Seja $f\colon X \longrightarrow X$ um mapa polinomial injetivo ($\mathbf{char}(\mathrm{k}) \geq 0$). Suponha por contradição que f é injetivo mas não bijetor.

Passo 1: Formule as condições de não-sobrejetividade, injetividade e pertinência em termos de equações polinomiais.

Passo 2: Seja $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ a coleção de todos os coeficientes que ocorrem nas equações do passo 1. Consideremos casos:

- $\mathbf{char}(\mathrm{k}) = p > 0$: Seja $R = \mathbb{F}_p[\{\alpha_i\}_{i\in I}]$ a $\mathbb{F}_p$-álgebra obtida por adjunção de todos os coeficientes $\{\alpha_i\}_{i\in I}$. Tome $\mathfrak{m} \in \mathbf{Spm}(R)$ um ideal maximal de R e note que pelo Nullstellensatz temos que $R/\mathfrak{m}$ é uma extensão finita de $\mathbb{F}_p$. Em particular, é um corpo finito. Reduzindo as relações polinomiais obtidas acima, obtemos um mapa polinomial

$$f \otimes R/\mathfrak{m}\colon \overline{X}(R/\mathfrak{m}) \longrightarrow \overline{X}(R/\mathfrak{m})$$

que é injetivo mas não sobrejetivo o que é um absurdo já que $\#X(R/\mathfrak{m}) < \infty$.

- **char**(k) = 0: Seja $R = \mathbb{Z}[\{\alpha_i\}]$ o subanel de k obtido por adjunção de todos os coeficientes $\{\alpha_i\}_{i \in I}$. Seja $\mathfrak{m} \in \mathbf{Spm}(R)$ um ideal maximal de R. Se $R/\mathfrak{m}$ é um corpo finito podemos repetir o argumento acima e chegar a uma contradição.

- **char**(k) = 0: Seja $R = \mathbb{Z}[\{\alpha_i\}]$ o subanel de k obtido por adjunção de todos os coeficientes $\{\alpha_i\}_{i\in I}$. Seja $\mathfrak{m} \in \mathbf{Spm}(R)$ um ideal maximal de R. Se $R/\mathfrak{m}$ é um corpo finito podemos repetir o argumento acima e chegar a uma contradição. Mas, esse é o caso:

Fato

Seja R uma $\mathbb{Z}$-álgebra de tipo finito e $\mathfrak{p} \in \boldsymbol{Spm}(R)$ um ideal maximal. Então, $R/\mathfrak{m}$ é um corpo finito.

Mapas polinomiais Keller

Condição necessária para invertibilidade

Se $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ *é um mapa polinomial invertível então* $\det J_F \in \mathrm{k}^*$.

Mapas polinomiais Keller

Condição necessária para invertibilidade

Se $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ *é um mapa polinomial invertível então* $\det J_F \in \mathrm{k}^*$.

De fato, isso é se segue da regra da cadeia aplicada em $f \circ g = (X_1, \ldots, X_n)$ e do fato que as unidades de $\mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n]$ são as constantes não nulas.

Mapas polinomiais Keller

Condição necessária para invertibilidade

Se $f = (F_1, \ldots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_k \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$ *é um mapa polinomial invertível então* $\det J_F \in \mathrm{k}^*$.

De fato, isso é se segue da regra da cadeia aplicada em $f \circ g = (X_1, \ldots, X_n)$ e do fato que as unidades de $\mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n]$ são as constantes não nulas.

Definição

Seja $f = (F_1, \ldots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_k \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$ *um mapa polinomial. Dizemos que* f *é um* ***mapa Keller*** *se* $\det J_F \in k^*$.

Mapas polinomiais Keller

Condição necessária para invertibilidade

Se $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ *é um mapa polinomial invertível então* $\det J_F \in \mathrm{k}^*$.

De fato, isso é se segue da regra da cadeia aplicada em $f \circ g = (X_1, \ldots, X_n)$ e do fato que as unidades de $\mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n]$ são as constantes não nulas.

Definição

Seja $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ *um mapa polinomial. Dizemos que* f *é um* ***mapa Keller*** *se* $\det J_F \in k^*$.

Exemplo

$f = (X^2 + X + Y, X^2 + Y)\colon \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ *é Keller com* $\det J_f = 1$.

Bases de Gröbner: critério para invertibilidade

Seja k um corpo arbitrário e $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_k \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$ um mapa polinomial com $F_1, \ldots, F_n \in k[X_1, \ldots, X_n]$.

[1] Van den Essen - **A criterion to decide if a polynomial map is invertible and to compute the inverse**

Bases de Gröbner: critério para invertibilidade

Seja k um corpo arbitrário e $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathrm{k}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathrm{k}}$ um mapa polinomial com $F_1, \ldots, F_n \in \mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n]$. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ novo sistema de variáveis e considere o ideal I

$$I = \langle Y_1 - F_1, \ldots, Y_n - F_n \rangle \subset k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n].$$

[1]Van den Essen - **A criterion to decide if a polynomial map is invertible and to compute the inverse**

Bases de Gröbner: critério para invertibilidade

Seja k um corpo arbitrário e $f = (F_1, \ldots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_k \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$ um mapa polinomial com $F_1, \ldots, F_n \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Sejam $Y_1, \ldots, Y_n$ novo sistema de variáveis e considere o ideal I

$$I = \langle Y_1 - F_1, \ldots, Y_n - F_n \rangle \subset k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n].$$

Fixe a ordem monomial lexicográfica em $k[X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n]$ com $X_1 > X_2 > \cdots > X_n > Y_n > \cdots > Y_1$[1].

[1] Van den Essen - **A criterion to decide if a polynomial map is invertible and to compute the inverse**

Bases de Gröbner: critério para invertibilidade

Seja k um corpo arbitrário e $f = (F_1, \dots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_k \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$ um mapa polinomial com $F_1, \dots, F_n \in k[X_1, \dots, X_n]$. Sejam $Y_1, \dots, Y_n$ novo sistema de variáveis e considere o ideal I

$$I = \langle Y_1 - F_1, \dots, Y_n - F_n \rangle \subset k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n].$$

Fixe a ordem monomial lexicográfica em $k[X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n]$ com $X_1 > X_2 > \cdots > X_n > Y_n > \cdots > Y_1$[1].

Teorema (Van den Essen)

Seja B a base de Grobner reduzida para I. Então,

- *f é invertível se e somente se*

$$B = \{X_1 - G_1(Y_1, \dots, Y_n), \dots, X_n - G_n(Y_1, \dots, Y_n)\}.$$

- *Se f é invertível então $g = (G_1, \dots, G_n)\colon \mathbb{A}^n_k \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$ é a inversa de f.*

[1] Van den Essen - **A criterion to decide if a polynomial map is invertible and to compute the inverse**

Exemplo

- ring r = 0,(X(1),X(2),Y(2),Y(1)),lp;
- poly F = X(1)**2+X(1)+X(2); poly G = X(1)**2+X(2);
- ideal I = Y(1)-F, Y(2)-G;
- ideal J = std(I);
- J;
- J[1]= $X(2) + Y(2)^2 - 2 * Y(2) * Y(1) - Y(2) + Y(1)^2$
- J[2]= $X(1) + Y(2) - Y(1)$

Assim, a inversa do mapa polinomial

$$f = (X^2 + X + Y, X^2 + Y)\colon\ \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

é

$$g = (X - Y, Y + 2XY - X^2 - Y^2)\colon\ \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$$

Ott-Heinrich Keller (1906-1990)

Em **Ganze Cremona–Transformationen - 1939** formula[2]:

Problema de Keller

Sejam $F_1, \ldots, F_n \in \mathbb{Z}[X_1, \ldots, X_n]$ *polinômios tal* $\det J_F = 1$. *Segue que* X_i *pode ser escrito como polinômios em* $F_1, \ldots, F_n$ *a coeficientes em* $\mathbb{Z}$*?*

[2] Keller: **MacTutor**

Conjectura do Jacobiano

“It seems to me that it will be worthwhile to investigate this question , however even in the plane it seems to be very difficult “

Conjectura do Jacobiano

"It seems to me that it will be worthwhile to investigate this question , however even in the plane it seems to be very difficult "

Conjectura do Jacobiano

Sejam $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ *e* $f = (F_1, \dots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ *um mapa polinomial Keller. Então,* f *é invertível.*

Conjectura do Jacobiano

“It seems to me that it will be worthwhile to investigate this question , however even in the plane it seems to be very difficult “

Conjectura do Jacobiano

Sejam $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ e $f = (F_1, \dots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ um mapa polinomial Keller. Então, f é invertível.

Lema

[a] *Seja $f = (F_1, \dots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ um mapa polinomial Keller definido sobre um domínio $R \subset \mathbb{C}$. Se f é invertível então a inversa está definida sobre R.*

[a] [Lemma 1.1.8] Van den Essen - **Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture**

Teorema

A Conjectura do Jacobiano é equivalente ao Problema de Keller. Mais precisamente, se existir um contra-exemplo para a Conjectura do Jacobiano então existe um mapa polinomial Keller $f\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ *definido sobre* $\mathbb{Z}$ *não invertível.*

Teorema

A Conjectura do Jacobiano é equivalente ao Problema de Keller. Mais precisamente, se existir um contra-exemplo para a Conjectura do Jacobiano então existe um mapa polinomial Keller $f\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ definido sobre $\mathbb{Z}$ não invertível.

Dado um mapa polinomial $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_k \longrightarrow \mathbb{A}^n_k$ definimos o grau inferior e superior pondo

$$\deg(f) = \min\{\deg(F_1), \ldots, \deg(F_n)\},$$

$$\operatorname{Deg}(f) = \max\{\deg(F_1), \ldots, \deg(F_n)\}.$$

Teorema

A Conjectura do Jacobiano é equivalente ao Problema de Keller. Mais precisamente, se existir um contra-exemplo para a Conjectura do Jacobiano então existe um mapa polinomial Keller $f\colon \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n \longrightarrow \mathbb{A}_{\mathbb{C}}^n$ definido sobre $\mathbb{Z}$ não invertível.

Dado um mapa polinomial $f = (F_1, \dots, F_n)\colon \mathbb{A}_k^n \longrightarrow \mathbb{A}_k^n$ definimos o grau inferior e superior pondo

$$\deg(f) = \min\{\deg(F_1), \dots, \deg(F_n)\},$$

$$\mathrm{Deg}(f) = \max\{\deg(F_1), \dots, \deg(F_n)\}.$$

Conjectura do Jacobiano:

- $\mathrm{Deg}(f) = 1$: álgebra linear.
- $\mathrm{Deg}(f) = 2$: um pouco mais fino, mas simples.

Grau dois

Proposição (Wang)

Seja $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ *um mapa polinomial Keller com* $\mathrm{Deg}(f) = 2$. *Então,* f *é invertível.*

Grau dois

Proposição (Wang)

Seja $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ *um mapa polinomial Keller com* $\mathrm{Deg}(f) = 2$. *Então,* f *é invertível.*

Argumento: Suponha que f não seja invertível. Pelo Teorema de Cynk-Rusek temos que f não é injetivo. Daí, podemos supor que $f(0) = f(h)$ para algum $h \neq 0$. Defina $c = 1/2$ e escreva $f = f_1 + f_2$ decomposição homogênea. Note que

$$0 = f_1(h) + 2 \cdot c \cdot f_2(h) = \frac{\partial [T f_1(h) + T^2 f_2(h)]}{\partial T}\Big|_{T=c} = \frac{\partial f(Th)}{\partial T}\Big|_{T=c} = J_f(c \cdot h) \cdot h$$

o que constradiz a condição $\det J_f \in \mathbb{C}^*$.

Redução ao grau três

O fato surpreendente é que para demonstrar a Conjectura do Jacobiano é suficiente considerar mapas polinomiais Keller de grau três [3]

[3] Bass, Connell, Wright - **The Jacobian Conjecture: Reduction of degree and Formal Expansion of the Inverse**

Redução ao grau três

O fato surpreendente é que para demonstrar a Conjectura do Jacobiano é suficiente considerar mapas polinomiais Keller de grau três [3]

Teorema

Se a Conjectura do Jacobiano é verdadeira para todos os mapas polinomiais $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ *com* $\mathrm{Deg}(f) \leq 3$ *e* $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ *então a Conjectura do Jacobiano é verdadeira.*

[3] Bass, Connell, Wright - **The Jacobian Conjecture: Reduction of degree and Formal Expansion of the Inverse**

Redução ao grau três

O fato surpreendente é que para demonstrar a Conjectura do Jacobiano é suficiente considerar mapas polinomiais Keller de grau três [3]

Teorema

Se a Conjectura do Jacobiano é verdadeira para todos os mapas polinomiais $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ *com* $\mathrm{Deg}(f) \leq 3$ *e* $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ *então a Conjectura do Jacobiano é verdadeira.*

Ideia: Aumentar a dimensão e usar mapas elementares para reduzir o grau.

[3] Bass, Connell, Wright - **The Jacobian Conjecture: Reduction of degree and Formal Expansion of the Inverse**

Redução ao grau três

O fato surpreendente é que para demonstrar a Conjectura do Jacobiano é suficiente considerar mapas polinomiais Keller de grau três [3]

Teorema

Se a Conjectura do Jacobiano é verdadeira para todos os mapas polinomiais $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ *com* $\mathrm{Deg}(f) \leq 3$ *e* $n \in \mathbb{Z}_{>1}$ *então a Conjectura do Jacobiano é verdadeira.*

Ideia: Aumentar a dimensão e usar mapas elementares para reduzir o grau.

Mapas elementares: Mapas polinomiais $e = (E_1, \ldots, E_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ tal que existe $1 \leq i \leq n$ com

$$E_i = X_i + A_i(X_1, \ldots, \tilde{X}_i, \ldots, X_n) \qquad \text{e} \qquad E_j = X_j \quad (j \neq i)$$

para algum $A_i \in \mathrm{k}[X_1, \ldots, \tilde{X}_i, \ldots, X_n]$.

[3] Bass, Connell, Wright - **The Jacobian Conjecture: Reduction of degree and Formal Expansion of the Inverse**

Redução ao grau três

Extensão de mapas: Dados $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ a l-extensão de um mapa polinomial $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}}$ é o mapa polinomial $f^{[l]}$ em $\mathbb{A}^{n+l}_{\mathbb{C}}$ que associa $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{A}^{n}_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^{l}_{\mathbb{C}}$ em $(f(\alpha_2), \alpha_2)$.

Lema

Seja $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathbb{C}}$ um mapa polinomial. Então, existem $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e mapas elementares $e_1, e_2\colon \mathbb{A}^{n+l}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^{n+l}_{\mathbb{C}}$ tais que

$$e_1 \circ f^{[l]} \circ e_2$$

tem grau no máximo três.

Redução ao grau três

Extensão de mapas: Dados $l \in \mathbb{Z}_{>0}$ a l-extensão de um mapa polinomial $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ é o mapa polinomial $f^{[l]}$ em $\mathbb{A}^{n+l}_{\mathbb{C}}$ que associa $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \times \mathbb{A}^l_{\mathbb{C}}$ em $(f(\alpha_2), \alpha_2)$.

Lema

Seja $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ um mapa polinomial. Então, existem $l \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ e mapas elementares $e_1, e_2\colon \mathbb{A}^{n+l}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathbb{A}^{n+l}_{\mathbb{C}}$ tais que

$$e_1 \circ f^{[l]} \circ e_2$$

tem grau no máximo três.

Idéia de Argumento: Suponha que exista monômio M de grau pelo menos quatro em F_1. Então, podemos escrever $M = PQ$ com $\deg(P) = 2$. Considere os mapas elementares:

$$e_1 = (X_1, \ldots, X_n, Y_1 + P, Y_2 + Q) \qquad e_2 = (X_1 - Y_1Y_2, X_2, \ldots, X_n, Y_1, Y_2).$$

Considerando $e_1 \circ f^{[2]} \circ e_2$ resulta um mapa polinomial com controle do grau, mais variáveis e tal que M não ocorre em $f^{[2]}$.

Domínios unimodulares

$(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ = um domínio local com ideal maximal $\mathfrak{m}$, corpo resíduo $\mathrm{k} = R/\mathfrak{m}$ e com corpo de frações K.

Dado um mapa polinomial $f = (F_1, \ldots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ dizemos que f está definido sobre R se $F_1, \ldots, F_n \in R[X_1, \ldots, X_n]$.

Domínios unimodulares

$(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ = um domínio local com ideal maximal $\mathfrak{m}$, corpo resíduo $\mathrm{k} = R/\mathfrak{m}$ e com corpo de frações K.

Dado um mapa polinomial $f = (F_1, \dots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ dizemos que f está definido sobre R se $F_1, \dots, F_n \in R[X_1, \dots, X_n]$.

Definição

Dizemos que R é um ***domínio unimodular*** *se satisfaz a seguinte propriedade.*

- *Para qualquer mapa polinomial Keller $f = (F_1, \dots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ $(n \geq 1)$ definido sobre R o mapa polinomial induzido por passagem ao quociente*

$$f \otimes \mathrm{k} \colon \mathrm{k}^n \longrightarrow \mathrm{k}^n$$

é não nulo.

Exemplos

Proposição

Seja $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ *um domínio local e suponha que* k *é infinito. Então,* R *é um domínio unimodular.*

Exemplos

Proposição

Seja $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ *um domínio local e suponha que* k *é infinito. Então,* R *é um domínio unimodular.*

Demonstração.

De fato, seja $f \colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K (n \geq 1)$ um mapa polinomial Keller tal que $(f \otimes \mathrm{k})(x_1, \ldots, x_n) = 0$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{k}^n$. Então, como k é infinito temos que $f \otimes \mathrm{k} \equiv 0$ e daí segue que todos os coeficientes de f estão no ideal maximal $\mathfrak{m}$, o que contradiz a condição de Keller. $\square$

Exemplos

Proposição

Seja $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ *um domínio local e suponha que* k *é infinito. Então,* R *é um domínio unimodular.*

Demonstração.

De fato, seja $f\colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K (n \geq 1)$ um mapa polinomial Keller tal que $(f \otimes \mathrm{k})(x_1, \ldots, x_n) = 0$ para todo $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{k}^n$. Então, como k é infinito temos que $f \otimes \mathrm{k} \equiv 0$ e daí segue que todos os coeficientes de f estão no ideal maximal $\mathfrak{m}$, o que contradiz a condição de Keller. □

Exemplo

O dominio local $(\mathbb{F}_p[[T]], T\mathbb{F}_p[[T]], \mathbb{F}_p)$ *não é unimodular. De fato, considere o mapa* $f = (X_1 - X_1^p, \ldots, X_n - X_n^p)\colon \mathbb{A}^n_{\overline{\mathbb{F}_p((T))}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\overline{\mathbb{F}_p((T))}}$.

Unimodularidade

char(R)	**char**(k)	k	unimodular
0	p	infinito	**sim**
0	p	finito	**????**
0	0	infinito	**sim**
p	p	finito	**não**
p	p	infinito	**sim**

Unimodularidade

char(R)	**char**(k)	k	unimodular
0	p	infinito	**sim**
0	p	finito	**????**
0	0	infinito	**sim**
p	p	finito	**não**
p	p	infinito	**sim**

Conjectura Unimodular (Essen-Lipton)

[a] *Qualquer domínio local de caracaterística zero é unimodular.*

[a] Van den Essen, Lipton - **A p-adic approach to the Jacobian Conjecture**

jacobiano $\Longrightarrow$ unimodular

Proposição

Suponha que a Conjectura do Jacobiano seja verdadeira. Então, qualquer domínio local de característica zero é unimodular.

jacobiano $\Longrightarrow$ unimodular

Proposição

Suponha que a Conjectura do Jacobiano seja verdadeira. Então, qualquer domínio local de característica zero é unimodular.

Demonstração.

Sejam $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ um domínio local de caracaterística zero com corpo de frações K e $f = (F_1, \dots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ um mapa polinomial Keller. Como a Conjectura do Jacobiano é verdadeira, existe a inversa $g = (G_1, \dots, G_n)$ de f. Agora, reduzindo módulo $\mathfrak{m}$ as identidades $g \circ f = X$ e $f \circ g = Y$ vemos que $f \mod \mathfrak{m}$ é uma bijeção. $\square$

Domínios d-unimodulares

Definição

Sejam $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ *um domínio local e* $d \in \mathbb{Z}_{>0}$*. Dizemos que* R *é* d***-unimodular*** *se satisfaz a seguinte condição:*

- *Para qualquer mapa polinomial Keller* $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ $(n \geq 1)$ *definido sobre* R ***com*** $\deg(f) \leq d$ *é tal que o mapa polinomial induzido por passagem ao quociente*

$$f \otimes \mathrm{k}\colon\ \mathrm{k}^n \longrightarrow \mathrm{k}^n$$

é não nulo.

Domínios d-unimodulares

Definição

Sejam $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ *um domínio local e* $d \in \mathbb{Z}_{>0}$*. Dizemos que* R *é* ***d-unimodular*** *se satisfaz a seguinte condição:*

- *Para qualquer mapa polinomial Keller* $f = (F_1, \ldots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ *($n \geq 1$) definido sobre* R ***com*** $\deg(f) \leq d$ *é tal que o mapa polinomial induzido por passagem ao quociente*

$$f \otimes \mathrm{k} \colon \mathrm{k}^n \longrightarrow \mathrm{k}^n$$

é não nulo.

Lembrar:

$$\deg(f) = \min\{\deg(F_1) \ldots, \deg(F_n)\}$$

$\mathbb{F}_q$-pontos em hipersuperfícies

Desigualdade de Ore

[a] *Seja* $F \in \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_n]$ *um polinômio não nulo de grau* $d \geq 1$ *e seja* $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_q}$ *a variedade afim correspondente. Então, vale*

$$\#X(\mathbb{F}_q) < \deg(F) q^{n-1}.$$

[a] Ghorpade - **A Note on Nullstellensatz over Finite Fields** — R. Lidl and H. Niederreiter **Finite Fields**

$\mathbb{F}_q$-pontos em hipersuperfícies

Desigualdade de Ore

[a] *Seja* $F \in \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_n]$ *um polinômio não nulo de grau* $d \geq 1$ *e seja* $X = \mathcal{Z}(F) \subset \mathbb{A}^n_{\mathbb{F}_q}$ *a variedade afim correspondente. Então, vale*

$$\#X(\mathbb{F}_q) < \deg(F) q^{n-1}.$$

[a] Ghorpade - **A Note on Nullstellensatz over Finite Fields** — R. Lidl and H. Niederreiter **Finite Fields**

Argumento: Se $n = 1$ ou $d = \deg(f) = 1$ então o resultado é claro. Procedemos por indução no par (n, d). Suponha $n, d > 1$ e que o resultado é verdadeiro para polinômios com no máximo n-variáveis e de grau menor do que d e para polinômios com no máximo $n - 1$ variáveis e de grau no máximo d. Devemos mostrar que vale para o par (n, d). Seja $F \in \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_n]$ um polinômio de grau d.

Consideremos os casos:

Consideremos os casos:

1. $X_1 - c$ **divide** F para algum $c \in \mathbb{F}_q$: podemos escrever $F = (X_1 - c)G$ para $G \in \mathbb{F}_q[X_1, \ldots, X_n]$ de grau menor que d. Assim, pela hipótese de indução temos que o número de soluções de $F = 0$ sobre $\mathbb{F}_q$ é no máximo
$$q^{n-1} + (d-1)q^{n-1} = dq^{n-1}$$

Consideremos os casos:

1. $X_1 - c$ **divide** F para algum $c \in \mathbb{F}_q$: podemos escrever $F = (X_1 - c)G$ para $G \in \mathbb{F}_q[X_1, \dots, X_n]$ de grau menor que d. Assim, pela hipótese de indução temos que o número de soluções de $F = 0$ sobre $\mathbb{F}_q$ é no máximo
$$q^{n-1} + (d-1)q^{n-1} = dq^{n-1}$$

2. $X_1 - c$ **não divide** F seja qual for $c \in \mathbb{F}_q$: para todo $c \in \mathbb{F}_q$ temos o polinômio $F(c, X_2, \dots, X_n) \in \mathbb{F}_q[X_2, \dots, X_n]$ em $n-1$ variáveis. Pela hipótese de indução sabemos que fixado $c \in \mathbb{F}_q$ temos no máximo dq^{n-2} soluções em $\mathbb{F}_q$. Daí, resulta que o número de soluções de $F = 0$ é no máximo
$$q \cdot dq^{n-2} = dq^{n-1}$$

Proposição

Seja $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ *um domínio local com* k *finito de cardinalidade* q*. Então,* R *é* $q-1$*-unimodular.*

Proposição

Seja $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ um domínio local com k finito de cardinalidade q. Então, R é $q-1$-unimodular.

Demonstração.

Seja $f = (F_1, \ldots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ um mapa polinomial Keller e suponha que $\deg(F_1) < q$. Por redução módulo $\mathfrak{m}$ de F_1 obtemos a hipersuperfície $X = \mathcal{Z}(\overline{F}_1)$ em $\mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ e pela Desigualdade de Ore resulta que $f \otimes k$ não se anula em k^n já que

$$\#X(\mathbb{F}_p) < \deg(\overline{F}_1)q^{n-1} < q^n.$$

$\square$

Proposição

Seja $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ um domínio local com k finito de cardinalidade q. Então, R é $q-1$-unimodular.

Demonstração.

Seja $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ um mapa polinomial Keller e suponha que $\deg(F_1) < q$. Por redução módulo $\mathfrak{m}$ de F_1 obtemos a hipersuperfície $X = \mathcal{Z}(\overline{F}_1)$ em $\mathbb{A}^{\mathrm{n}}_{\mathrm{k}}$ e pela Desigualdade de Ore resulta que $f \otimes k$ não se anula em k^n já que

$$\#X(\mathbb{F}_p) < \deg(\overline{F}_1)q^{n-1} < q^n.$$

$\square$

Nota: Esse é o melhor resultado para $(\mathbb{F}_p[[T]], T\mathbb{F}_p[[T]], \mathbb{F}_p)$.

Conjectura do Jacobiano do ponto de vista aritmético

Proposição

Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ *um anel de valoração completo com corpo de frações* K *e* $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ *um mapa polinomial Keller definido sobre* R. *Se* $\mathcal{O}$ *é uma* R*-álgebra denote por* $X(\mathcal{O})$ *o conjunto de* $\mathcal{O}$*-pontos do esquema* $X = \operatorname{Spec}(R[X_1, \ldots, X_n]/\langle F_1, \ldots, F_n\rangle)$. *Então, existe uma bijeção:*

$$X(R) \cong X(\mathrm{k})$$

[4] Marvin J. Greenberg - **Lectures on forms in many variables**

Conjectura do Jacobiano do ponto de vista aritmético

Proposição

Sejam $(R, \mathfrak{m}, k)$ um anel de valoração completo com corpo de frações K e $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ um mapa polinomial Keller definido sobre R. Se $\mathcal{O}$ é uma R-álgebra denote por $X(\mathcal{O})$ o conjunto de $\mathcal{O}$-pontos do esquema $X = \operatorname{Spec}(R[X_1, \ldots, X_n]/\langle F_1, \ldots, F_n\rangle)$. Então, existe uma bijeção:

$$X(R) \cong X(\mathrm{k})$$

Argumento: Como f é um mapa Keller temos que $\operatorname{ord}(\det J_f(\alpha)) = 0$ para qualquer $\alpha \in R^n$. A bijeção é dada explicitamente do seguinte modo: Para cada $\alpha \in R^n$ obtemos $\varphi(\alpha) \in \mathrm{k}^n$ o k-ponto obtido por redução módulo $\mathfrak{m}$. O Lema de Hensel[4] garante que a aplicação $\varphi\colon X(R) \longrightarrow X(\mathrm{k})$ é uma bijeção.

[4] Marvin J. Greenberg - **Lectures on forms in many variables**

Conjectura do Jacobiano do ponto de vista aritmético

Teorema

A Conjectura do Jacobiano é verdadeira se e somente se o anel dos inteiros p-ádicos, $\mathbb{Z}_p$, é unimodular para uma infinidade de primos p.

[5] $\mathbb{Z}_p$ = anel dos inteiros p-adicos = completamento de $\mathbb{Z}$ sobre o ideal maximal $\langle p \rangle$

Conjectura do Jacobiano do ponto de vista aritmético

Teorema

A Conjectura do Jacobiano é verdadeira se e somente se o anel dos inteiros p-ádicos, $\mathbb{Z}_p$, é unimodular para uma infinidade de primos p.

Nota: Não é conhecido exemplos de primos p tais que $\mathbb{Z}_p$ é unimodular. Por exemplo, $p = 2$ é unimodular?[5]

[5] $\mathbb{Z}_p$ = anel dos inteiros p-adicos = completamento de $\mathbb{Z}$ sobre o ideal maximal $\langle p \rangle$

Conjectura do Jacobiano do ponto de vista aritmético

Teorema

A Conjectura do Jacobiano é verdadeira se e somente se o anel dos inteiros p-ádicos, $\mathbb{Z}_p$, é unimodular para uma infinidade de primos p.

Nota: Não é conhecido exemplos de primos p tais que $\mathbb{Z}_p$ é unimodular. Por exemplo, $p = 2$ é unimodular?[5]

Observação

Pela observações anteriores temos que a Conjectura do Jacobiano é equivalente ao seguinte: para uma infinidade de primos p temos que

- *Para qualquer $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ e polinômios $F_1, \ldots, F_n \in \mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n]$ com $\det J_F = 1$ temos que*
$$\#X(\mathbb{Z}_p) < p^n$$
onde $X = \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p[X_1, \ldots, X_n]/\langle F_1, \ldots, F_n\rangle)$.

[5] $\mathbb{Z}_p$ = anel dos inteiros p-adicos = completamento de $\mathbb{Z}$ sobre o ideal maximal $\langle p\rangle$

Hoje

Teorema (Essen-Lipton)

A Conjectura do Jacobiano é verdadeira se e somente se o anel dos inteiros p-ádicos, $\mathbb{Z}_p$, é unimodular para quase todos os primos p.

Hoje

Teorema (Essen-Lipton)

A Conjectura do Jacobiano é verdadeira se e somente se o anel dos inteiros p-ádicos, $\mathbb{Z}_p$, é unimodular para quase todos os primos p.

Fato

[a] *Seja R um domínio de ideais principais com corpo de frações K. Seja $f = (F_1, \dots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ um mapa polinomial Keller definido sobre R e suponha que f não seja injetivo sobre R. Então, para todo $m \in \mathbb{Z}_{>1}$ existe um mapa Keller $g_m \colon \mathbb{A}^n_K \longrightarrow \mathbb{A}^n_K$ definido sobre R com $\#g_m^{-1}(\alpha) \geq m$ para algum $\alpha \in R^n$.*

---

[a] [Theorem 4.5.5] Crachiola, Essen, Kuroda - **Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture: New Results from the Beginning of the 21st Century**

Argumento (Essen-Lipton)

Passo 1: Por resultados anteriores sabemos que para provar a Conjectura do Jacobiano é suficiente considerar mapas polinomiais Keller definidos sobre $\mathbb{Z}$. Suponha que $\mathbb{Z}_p$ seja um domínio unimodular para quase todo primo p.

[6] [Theorem 10.3.1] Van den Essen - **Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture**

Argumento (Essen-Lipton)

Passo 1: Por resultados anteriores sabemos que para provar a Conjectura do Jacobiano é suficiente considerar mapas polinomiais Keller definidos sobre $\mathbb{Z}$. Suponha que $\mathbb{Z}_p$ seja um domínio unimodular para quase todo primo p.

Passo 2: Seja $f = (F_1, \ldots, F_n) \colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ um mapa polinomial Keller definido sobre $\mathbb{Z}$ que não é invertível. Então, sabemos que f não é injetivo e assim existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ distintos tais que $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$. Seja $R = \mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_2]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra obtida por ajunção.

[6] [Theorem 10.3.1] Van den Essen - **Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture**

Argumento (Essen-Lipton)

Passo 1: Por resultados anteriores sabemos que para provar a Conjectura do Jacobiano é suficiente considerar mapas polinomiais Keller definidos sobre $\mathbb{Z}$. Suponha que $\mathbb{Z}_p$ seja um domínio unimodular para quase todo primo p.

Passo 2: Seja $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ um mapa polinomial Keller definido sobre $\mathbb{Z}$ que não é invertível. Então, sabemos que f não é injetivo e assim existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ distintos tais que $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$. Seja $R = \mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_2]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra obtida por ajunção.

Passo 3: Pelo Lema da Imersão[6] garantimos que R se injeta em $\mathbb{Z}_p$ para uma infinidade de primos p. Escolha p tal que $\mathbb{Z}_p$ é unimodular. Assim, podemos encarar f como um mapa polinomial Keller definido sobre $\mathbb{Z}_p$ que não é injetivo.

[6][Theorem 10.3.1] Van den Essen - **Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture**

Argumento (Essen-Lipton)

Passo 1: Por resultados anteriores sabemos que para provar a Conjectura do Jacobiano é suficiente considerar mapas polinomiais Keller definidos sobre $\mathbb{Z}$. Suponha que $\mathbb{Z}_p$ seja um domínio unimodular para quase todo primo p.

Passo 2: Seja $f = (F_1, \ldots, F_n)\colon \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}} \longrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ um mapa polinomial Keller definido sobre $\mathbb{Z}$ que não é invertível. Então, sabemos que f não é injetivo e assim existem $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{A}^n_{\mathbb{Q}}$ distintos tais que $f(\alpha_1) = f(\alpha_2)$. Seja $R = \mathbb{Z}[\alpha_1, \alpha_2]$ a $\mathbb{Z}$-álgebra obtida por ajunção.

Passo 3: Pelo Lema da Imersão[6] garantimos que R se injeta em $\mathbb{Z}_p$ para uma infinidade de primos p. Escolha p tal que $\mathbb{Z}_p$ é unimodular. Assim, podemos encarar f como um mapa polinomial Keller definido sobre $\mathbb{Z}_p$ que não é injetivo.

Passo 4: O fato anterior implica que existe um mapa Keller g definido sobre $\mathbb{Z}_p$ tendo uma fibra com $p^n + 1$ elementos. Mas, isso é uma contradição já que o Lema de Hensel implica que toda fibra tem no máximo p^n elementos.

[6] [Theorem 10.3.1] Van den Essen - **Polynomial Automorphisms and the Jacobian Conjecture**

Comentários finais: redução para único primo?

Um domínio R é dito **Keller** se

- Para qualquer $n \geq 1$ e polinômios $F_1, \ldots, F_n \in R[X_1, \ldots, X_n]$ satisfazendo $\det J_F = 1$ temos que o R-módulo

$$R[X_1, \ldots, X_n]/\langle F_1, \ldots, F_n \rangle$$

é finitamente gerado.

Comentários finais: redução para único primo?

Um domínio R é dito **Keller** se

- Para qualquer $n \geq 1$ e polinômios $F_1, \ldots, F_n \in R[X_1, \ldots, X_n]$ satisfazendo $\det J_F = 1$ temos que o R-módulo

$$R[X_1, \ldots, X_n]/\langle F_1, \ldots, F_n \rangle$$

  é finitamente gerado.

Proposição

Qualquer corpo algebricamente fechado k *é Keller.*

Comentários finais: redução para único primo?

Um domínio R é dito **Keller** se

- Para qualquer $n \geq 1$ e polinômios $F_1, \ldots, F_n \in R[X_1, \ldots, X_n]$ satisfazendo $\det J_F = 1$ temos que o R-módulo

$$R[X_1, \ldots, X_n]/\langle F_1, \ldots, F_n \rangle$$

é finitamente gerado.

Proposição

Qualquer corpo algebricamente fechado k *é Keller.*

Argumento: Sejam $F_1, \ldots, F_n \in \mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n]$ polinômios satisfazendo a condição $\det J_F = 1$. Seja $A = \mathrm{k}[X_1, \ldots, X_n]/\langle F_1, \ldots, F_n \rangle$. Pela teoria da dimensão de anéis locais sabemos que para qualquer ideal maximal $\mathfrak{m} \in \mathbf{Spm}(R)$ vale $\dim A_\mathfrak{m} \leq \dim_\mathrm{k} T_\mathfrak{m}$ onde $T_\mathfrak{m} = \mathbf{Hom}_\mathrm{k}(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2, \mathrm{k})$. Pelo critério do Jacobiano temos

$$\dim_\mathrm{k} T_\mathfrak{m} = n - \mathbf{rank}(J_F \otimes \mathrm{k}(\mathfrak{m})) = n - n = 0.$$

Assim, concluímos que $\dim R_\mathfrak{m} = 0$. Em particular, $\dim R = 0$ de modo que R é uma k-álgebra artiniana. Daí, $\dim_\mathrm{k} R < \infty$.

Comentários finais: redução para único primo?

Problema

Seja $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ *um anel de valoração discreta de característica zero com* k *finito. O domínio* R *é Keller?*

Comentários finais: redução para único primo?

Problema

Seja $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ *um anel de valoração discreta de característica zero com* k *finito. O domínio* R *é Keller?*

Exemplo

O domínio local $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k}) = (\mathbb{F}_p[[T]], T\mathbb{F}_p[[T]], \mathbb{F}_p)$ *não é Keller. De fato, tome* $F = TX^p - X$*. Então o quociente* $R/\langle F \rangle$ *não é finitamente gerado como* R*-módulo, já que* $\overline{X}$ *não é inteiro sobre* $\mathbb{F}_p[[T]]$*.*

Aplicações:

Comentários finais: redução para único primo?

Problema

Seja $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k})$ um anel de valoração discreta de característica zero com k finito. O domínio R é Keller?

Exemplo

O domínio local $(R, \mathfrak{m}, \mathrm{k}) = (\mathbb{F}_p[[T]], T\mathbb{F}_p[[T]], \mathbb{F}_p)$ não é Keller. De fato, tome $F = TX^p - X$. Então o quociente $R/\langle F \rangle$ não é finitamente gerado como R-módulo, já que $\overline{X}$ não é inteiro sobre $\mathbb{F}_p[[T]]$.

Aplicações:

Teorema

*Suponha que a resposta para o problema acima é **SIM**. Se $\mathbb{Z}_p$ é unimodular para **algum** primo p então a Conjectura do Jacobiano é verdadeira.*

Obrigado :-)